Limits: Journal of Mathematics and Its Applications
E-ISSN: 2579-8936
P-ISSN: 1829-605X
Vol. 22, No. 1, Maret 2025, 67-78
DOI: http://dx.doi.org/10.12962/limits.v22i1.3373

Analisis *Survival* Distribusi Lomax dengan Estimasi *Maximum Likelihood*

Victoria Anggia Alexandra[1], Aprilia Prastyaningrum[2], Ardi Kurniawan[3,*], Dita Amelia[4]
[1,2,3,4] Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Airlangga Surabaya Indonesia
[*]Corresponding author: ardi-k@fst.unair.ac.id

Diajukan: 14 April 2024, Diperbaiki: 14 Desember 2024, Diterima: 13 Januari 2025

Abstrak

Analisis data uji hidup, sebuah kumpulan metode statistik yang digunakan untuk mengukur ketahanan hidup suatu individu. Data waktu ketahanan hidup yang diperoleh dari percobaan uji hidup berupa data tersensor tipe III, yang terjadi ketika pengamatan masuk pada waktu yang berbeda dan berlangsung selama durasi yang berbeda-beda. Dalam analisis ketahanan hidup, data uji hidup mengikuti distribusi probabilitas tertentu. Estimasi dari parameter distribusi probabilitas dilakukan untuk mengetahui karakteristik suatu populasi. Penelitian ini bertujuan untuk mendapatkan nilai parameter distribusi Lomax pada data tersensor tipe III dengan metode estimasi *Maximum Likelihood* dan Newton-Raphson. Penerapan hasil estimasi parameter dilakukan pada data ketahanan hidup pasca operasi jantung tahun 2014 di salah satu RS di Jakarta. Hasil estimasi parameter $\hat{\alpha}$ pada data pasien pasca operasi jantung adalah sebesar 1,552 dan hasil estimasi parameter $\hat{\beta}$ pada data pasien pasca operasi jantung adalah sebesar 20,38. Berdasarkan hasil tersebut, dapat disimpulkan bahwa estimasi probabilitas ketahanan hidup pasien pasca operasi jantung selama lebih dari 49 hari adalah sebesar 14,94%.

Kata Kunci: Analisis *Survival*; Distribusi Lomax; Data Tersensor Tipe III; Estimasi Maksimum Likelihood; Newton-Raphson.

Abstract

Survival analysis, a collection of statistical methods used to measure the survival of an individual. Survival time data obtained from a survival experiment is type III censored data, which occurs when observations are entered at different times and last for varying durations. In survival analysis, survival test data follows a certain probability distribution. Estimation of the probability distribution parameters is done to determine the characteristics of a population. This study aims to obtain the value of Lomax distribution parameters on type III censored data with Maximum Likelihood and Newton-Raphson estimation methods. The application of the parameter estimation results is carried out on post-heart surgery survival data in 2014 at one of the hospitals in Jakarta. The result of the $\hat{\alpha}$ parameter estimation on the post-heart surgery patient data is 1.552 and the result of the $\hat{\beta}$ parameter estimation on the post-heart surgery patient data is 20.38. Based on these results, it can be concluded that the estimated probability of survival of post-heart surgery patients for more than 49 days is 14.94%.

***Keywords**: Survival Analysis; Lomax Distribution; Type III Censored Data; Maximum Likelihood Estimation; Newton-Raphson.*

1 Pendahuluan

Perkembangan ilmu statistika telah melesat begitu cepat dengan ditemukannya beragam metode statistik sehingga dapat dipakai dalam menyelesaikan suatu permasalahan, termasuk Analisis Ketahanan. Analisis tersebut merupakan bagian dari metode statistika untuk analisis data terkait *outcome variable* berupa rentan waktu selesainya suatu kejadian [1]. Analisis Ketahanan bertujuan untuk mengestimasi dan menginterpretasikan peluang ketahanan suatu data uji hidup yang diartikan sebagai individu yang mampu bertahan melebihi rentang waktu yang telah ditetapkan.

Pada pemodelan data uji hidup diperlukan data mengenai ketahanan hidup, dapat berbentuk data lengkap (seluruh observasi dicatat kelangsungan hidupnya sampai meninggal) dan data tersensor. Pemerolehan data tersensor didapatkan ketika waktu *survival* yang diteliti tidak dapat ditentukan dengan jelas dan terdapat indikasi individu tersebut tetap bertahan hidup hingga periode waktu yang ditentukan.

Penyensoran tipe III sering diterapkan dalam analisis ketahanan hidup pasien pendertia penakit tertentu. Penyensoran ini merujuk pada observasi yang terjadi pada selang waktu berbeda-beda pasca operasi jantung. Perbedaan selang waktu berbeda tersebut disebabkan oleh fakta bahwa pendertia suatu penyakit pada waktu awal menderita dan berakhir tidaklah seragam. *Survival* dianalisis mulai dari pasien mulai menderita suatu penyakit hingga pasien dinyatakan sembuh atau meninggal dunia[2].

Data uji hidup mengikuti suatu bentuk distibusi probabilitas tertentu. Distribusi Lomax, yang juga dikenal sebagai distribusi Pareto tipe II, merupakan bentuk distribusi banyak digunakan pada analisis *survival* sehingga distribusi tersebut dapat menghasilkan model baik dalam bidang biomedis. Hal ini menjadi bahan pertimbangan dalam penelitian analisis ketahanan hidup pasien. Distribusi Lomax telah dimanfaatkan dalam penelitian terkait aktuaria, biomedis, dan reliabilitas. Penggunaan yang luas dari distribusi ini terdapat dalam pemodelan stokastik dari penurunan umur pakai suatu komponen.

Langkah pertama yang dilakukan adalah mengestimasi parameter, pengestimasian parameter bisa dilakukan secara secara klasik dan secara Bayesian[3]. Pendekatan klasik didasarkan pada pendugaan parameter yang sepenuhnya didasarkan pada informasi yang diperoleh dari sampel acak. Beberapa pendekatan klasik yang dapat digunakan antara lain *Least Square*, metode momen, dan *Maximum Likelihood*. Dalam penelitian ini, metode yang diterapkan untuk mengestimasi parameter adalah estimasi *Maximum Likelihood*. Proses estimasi parameter dilaksanakan dengan cara memaksimumkan fungsi likelihood. Apabila nilai parameter yang diperoleh bersifat implisit dan non-linier, maka pemaksimalan fungsi tersebut tidak dapat diselesaikan secara sederhana sehingga dibutuhkan metode alternatif untuk memudahkanya yaitu dengan menggunakan algoritma *Fisher-Scoring*. Algoritma *Fisher-Scoring* merupakan salah satu pengembangan dari Newton-Raphson, yang mengubah matriks Hessian dengan matriks inisialisasi.

Penelitian sebelumnya yang membahas terkait estimasi parameter distribusi weibull dan distribusi nilai ekstrim pada menggunakan metode estimasi *Maximum Likelihood* dan Newton-Raphson [4]. Selain itu, terdapat penelitian sebelumnya yang memiliki tujuan untuk mengestimasi sebuah parameter model ketahanan berdistribusi eksponensial menggunakan metode *Maximum Likelihood* dan *Bayesian Self.* Data tersebut menggunakan data penyakit kanker paru-paru yang menghasilkan Kesimpulan bahwa semakin lama rentan seorang penderita kanker paru-paru, semakin kecil peluang hidupnya. [5].

Berdasarkan penelitian sebelumnya, Penelitian ini mengangkat inovasi dengan mengestimasi parameter distribusi Lomax tersensor tipe III melalui pendekatan Maximum Likelihood dan metode Newton-Raphson. Hasil dari estimasi parameter tersebut akan diterapkan pada data rekam medis 40 pasien pasca operasi jantung yang mengalami kematian. [5]

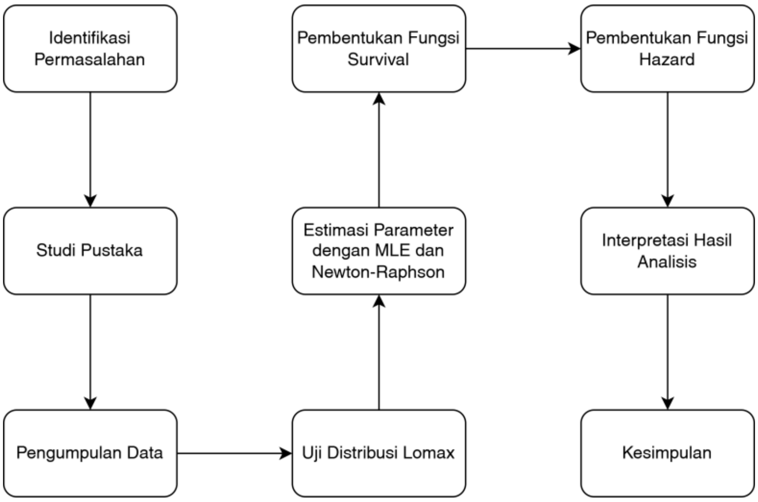
2 Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan data tersensor tipe III terkait dengan kematian pasien pasca operasi jantung pada tahun 2014. [6]. Penelitian sebelumnya menggunakan model distribusi log-logistik dalam analisis *survival*. Kebaruan penelitian ini dilakukan dengan mengeksplorasi penggunaan distribusi Lomax dalam estimasi parameter sehingga dapat menentukan fungsi *survival* dan fungsi *hazard* pada data tersensor tipe III. Data terdiri dari 40 pasien yang mengalami kejadian gagal berupa kematian setelah operasi jantung. Waktu ketahanan hidup pasien diukur dalam hitungan hari dari pasca operasi jantung hingga pasien dinyatakan meninggal dunia. Pada penelitian ini, 30 pasien memiliki waktu ketahanan hidup yang tidak tersensor dengan $\delta_i = 1$ (meninggal), sedangkan 10 pasien lainnya memiliki waktu ketahanan hidup yang tersensor dengan $\delta_i = 0$, mengindikasikan bahwa pasien bertahan hidup lebih dari 15 hari. Karakteristik dan definisi dari variabel penelitian ini disajikan pada Tabel 1.

Tabel 1. Karakteristik Variabel Penelitian

Variabel	**Definisi**	**Skala**
Waktu Ketahanan Hidup (t_i)	Waktu tahan hidup pasien setelah operasi jantung	Rasio
Status Penyensoran (δ_i)	Kondisi pasien pada akhir pengamatan (meninggal atau tersensor)	Nominal

Penelitian ini menggunakan analisis *survival* berdasarkan distribusi Lomax. Fungsi *survival* pada penelitian ini digunakan untuk mengetahui peluang ketahanan hidup sekelompok pasien atau individu pada waktu ketahanan hidup tertentu setelah suatu kejadian dimulai, seperti operasi jantung pada kasus ini. Sedangkan fungsi *hazard* pada penelitian ini digunakan untuk menggambarkan tingkat risiko atau kecenderungan suatu kejadian (seperti kematian) terjadi pada suatu titik waktu ketahanan hidup tertentu setelah suatu kejadian dimulai. Estimasi parameter pada fungsi *survival* dilakukan dengan metode estimasi *Maximum Likelihood* dan Newton-Raphson. *Flowchart* penelitian ditunjukkan pada Gambar 1 berikut.



Gambar 1. *Flowchart* Penelitian

2.1 Distribusi Lomax

Distribusi Lomax adalah distribusi probabilitas yang memiliki *heavy-tail* pada plot fungsi kepadatan probabilitasnya [7]. Distribusi ini pertama kali diusulkan oleh K. Lomax dan sering digunakan di bidang analisis aktuaria dan *survival* [8]. Distribusi Lomax memiliki *Probability Density Function* (PDF) yang dapat dituliskan sebagai berikut:.

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\alpha\beta^{\alpha}}{(t+\beta)^{\alpha+1}}, & t \geq 0, \alpha > 0, \beta > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \tag{1}$$

Sedangkan fungsi kumulatif distribusi Lomax dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$F(t) = 1 - \left(\frac{\beta}{t+\beta}\right)^{\alpha} \tag{2}$$

2.2 Fungsi *Survival*

Fungsi *survival* menghasilkan peluang objek yang dipilih secara acak untuk bertahan hidup setelah waktu tertentu t $(t > 0)$ kemudian dapat dinyatakan sebagai berikut [1] :

$$\begin{aligned} S(t) &= P(T \geq t) \\ &= 1 - P(T \leq t) \\ &= 1 - F(t) \end{aligned} \tag{3}$$

Sehingga fungsi *survival* pada Distribusi Lomax dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$S(t) = \left(\frac{\beta}{t+\beta}\right)^{\alpha} \tag{4}$$

2.3 Fungsi *Hazard*

Fungsi hazard adalah suatu fungsi yang menggambarkan tingkat kegagalan atau risiko terjadinya suatu peristiwa dalam interval waktu yang singkat selama periode bertahan hidup. [9]. Fungsi ini dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} \tag{5}$$

Fungsi *Hazard* Distribusi Lomax dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$h(t) = \frac{\alpha}{t+\beta} \tag{6}$$

2.4 Estimasi *Maximum Likelihood*

Pendekatan estimasi *Maximum Likelihood* didasarkan pada gagasan bahwa nilai parameter yang paling mendekati adalah nilai yang memaksimalkan fungsi *likelihood* dari data yang diamati [10]. Secara matematis, metode estimasi *Maximum Likelihood* dinyatakan sebagai berikut:

$$\left(\hat{\alpha}, \hat{\beta}\right) = \arg \max_{(\alpha,\beta)} \left\{Log\left(L(\alpha,\beta)\right)\right\} \tag{7}$$

2.4.1 Fungsi Likelihood

Fungsi *likelihood* merepresentasikan kepadatan probabilitas gabungan dari data yang diamati, yang diperlakukan sebagai fungsi yang bergantung pada parameter dalam model statistik [11]. Penentuan fungsi likelihood merupakan langkah awal dalam proses estimasi parameter menggunakan metode Maximum Likelihood. Untuk data tersensor tipe III, fungsi likelihood dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$L(\alpha,\beta) = \prod_{i=1}^{n} f(t_i)^{\delta_i}\, S(t_i)^{1-\delta_i} \tag{8}$$

Fungsi *likelihood* dari distribusi Lomax dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$L(\alpha,\beta) = \prod_{i=1}^{n} f(t_i)^{\delta_i}\, S(t_i)^{1-\delta_i}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\alpha\beta^{\alpha}}{(t_i+\beta)^{\alpha+1}}\right)^{\delta_i} \left(\left(\frac{\beta}{t_i+\beta}\right)^{\alpha}\right)^{1-\delta_i}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \alpha^{\delta_i}\, \beta^{\alpha} \left(\frac{1}{t_i+\beta}\right)^{\alpha+\delta_i}$$

$$L(\alpha,\beta) = \alpha^{\sum_{i=1}^{n}\delta_i}\, \beta^{n\alpha} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{t_i+\beta}\right)^{\alpha+\delta_i} \tag{9}$$

2.4.2 Fungsi Log-Likelihood

Fungsi *log-likelihood* dari distribusi Lomax pada dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$ln\big(L(\alpha,\beta)\big) = ln\left(\alpha^{\sum_{i=1}^{n}\delta_i}\,\beta^{n\alpha}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{t_i+\beta}\right)^{\alpha+\delta_i}\right)$$

$$= ln\left(\alpha^{\sum_{i=1}^{n}\delta_i}\right) + ln(\beta^{n\alpha}) + ln\left(\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{t_i+\beta}\right)^{\alpha+\delta_i}\right)$$

$$ln\big(L(\alpha,\beta)\big) = \sum_{i=1}^{n}\delta_i\,ln(\alpha) + n\alpha\,ln(\beta) - \sum_{i=1}^{n}(\alpha+\delta_i)\,ln(t_i+\beta) \tag{10}$$

2.4.3 Estimasi Parameter $\hat{\alpha}$

Estimasi parameter $\hat{\alpha}$ dilakukan dengan menurunkan persamaan (10) terhadap α dan disamakan dengan 0. Hasil estimasi parameter $\hat{\alpha}$ dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{\partial\, ln(L(\alpha,\beta)}{\partial\alpha} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\sum_{i=1}^{n}\delta_i\,ln(\alpha) + n\alpha\,ln(\beta) - \sum_{i=1}^{n}(\alpha+\delta_i)\,ln(t_i+\beta)\right)$$

$$\frac{\partial\, ln(L(\alpha,\beta)}{\partial\alpha} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\delta_i}{\alpha} + n\,ln(\beta) - \sum_{i=1}^{n}ln(t_i+\beta)$$

$$0 = \sum_{i=1}^{n}\frac{\delta_i}{\alpha} + n\,ln(\beta) - \sum_{i=1}^{n}ln(t_i+\beta)$$

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\delta_i}{\sum_{i=1}^{n}ln(t_i+\beta) - n\,ln(\beta)} \tag{11}$$

2.4.4 Estimasi Parameter $\hat{\beta}$

Estimasi parameter $\hat{\beta}$ dilakukan dengan menurunkan persamaan (10) terhadap β dan disamakan dengan 0. Hasil estimasi parameter $\hat{\beta}$ dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{\partial\ln\,(L(\alpha,\beta)}{\partial\beta} = \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\sum_{i=1}^{n}\delta_i\,ln(\alpha) + n\alpha\,ln(\beta) - \sum_{i=1}^{n}(\alpha+\delta_i)\,ln(t_i+\beta)\right)$$

$$\frac{\partial\ln\,(L(\alpha,\beta)}{\partial\beta} = \frac{n\alpha}{\beta} - \sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha+\delta_i}{t_i+\beta}$$

$$0 = \frac{n\alpha}{\beta} - \sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha+\delta_i}{t_i+\beta}$$

$$\hat{\beta} = \frac{n\alpha}{\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha+\delta_i}{t_i+\beta}} \tag{12}$$

2.5 Newton-Raphson

Metode Newton-Raphson dilakukan pada pendekatan estimasi *Maximum Likelihood* untuk mencari nilai-nilai parameter dalam fungsi *likelihood* distribusi Lomax berdasarkan algoritma Newton-Raphson (NR) [12]. Algoritma Newton-Raphson adalah metode numerik untuk menemukan akar dari suatu persamaan nonlinear. Metode ini menggunakan pendekatan iteratif dengan mendekati akar fungsi melalui garis singgung pada grafik fungsi tersebut [13]. Persamaan Newton-Raphson secara matematis dinyatakan sebagai berikut:

$$\hat{\theta}^{(i+1)} = \hat{\theta}^{(i)} - \left[H\left(\hat{\theta}^{(i)}\right)\right]^{-1} g\left(\hat{\theta}^{(i)}\right) \tag{13}$$

dengan,

$$\hat{\theta} = \begin{bmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$g\left(\hat{\theta}\right) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \ln\left(L(\alpha,\beta)\right)}{\partial \alpha} \\ \dfrac{\partial \ln\left(L(\alpha,\beta)\right)}{\partial \beta} \end{bmatrix} \tag{15}$$

$$H = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 \ln\left(L(\alpha,\beta)\right)}{\partial \alpha^2} & \dfrac{\partial^2 \ln\left(L(\alpha,\beta)\right)}{\partial \alpha \partial \beta} \\ \dfrac{\partial^2 \ln\left(L(\alpha,\beta)\right)}{\partial \beta \partial \alpha} & \dfrac{\partial^2 \ln\left(L(\alpha,\beta)\right)}{\partial \beta^2} \end{bmatrix} \tag{16}$$

Berdasarkan hasil perhitungan pada persamaan (13), persamaan (14), dan persamaan (15), maka diperoleh penaksir $\hat{\alpha}$ dan $\hat{\beta}$ dari fungsi survival dengan distribusi Lomax sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{i+1} \\ \hat{\beta}_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{i} \\ \hat{\beta}_{i} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\delta_i}{\alpha^2} & \dfrac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{t_i + \beta} \\ \dfrac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{t_i + \beta} & \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\alpha + \delta_i}{(t_i + \beta)^2} - \dfrac{n\alpha}{\beta^2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\delta_i}{\alpha} + n\, ln(\beta) - \sum_{i=1}^{n} ln(t_i + \beta) \\ \dfrac{n\alpha}{\beta} - \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\alpha + \delta_i}{t_i + \beta} \end{bmatrix} \tag{17}$$

2.6 Uji Kolmogorov-Smirnov

Uji Kolmogorov-Smirnov adalah uji kesesuaian distribusi, yang berarti menguji tingkat kesamaan antara distribusi sekumpulan nilai dari sampel (nilai yang diamati) dengan distribusi teoritis tertentu [14]. Uji ini bertujuan untuk menentukan apakah nilai-nilai dalam sampel dapat secara logis diasumsikan berasal dari populasi yang memiliki distribusi probabilitas tertentu.

Statistik uji yang digunakan adalah D, yang merupakan nilai maksimum dari $F(X_i) - \frac{i-1}{N}$ atau $\frac{i-1}{N} - F(X_i)$. Secara matematis, dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$D = \max_{1<i<N} \left(F(X_i) - \frac{i-1}{N}, \frac{i-1}{N} - F(X_i) \right) \tag{18}$$

3 Hasil dan Pembahasan

Penelitian ini mendapatkan hasil estimasi parameter distribusi Lomax dengan metode estimasi *Maximum Likelihood* dan Newton-Raphson, kemudian dilakukan penerapan pada data sekunder. Penelitia ini menggunakan data sekunder berupa data rekam medis dari 40 pasien yang telah menjalani operasi jantung hingga mereka berpulang. Waktu ketahanan hidup pasien adalah waktu pasien bertahan sampai terjadi kematian (dalam hari). Dari total 40 pasien yang diteliti, 30 di antaranya mengalami kematian, sehingga waktu ketahanan hidup mereka tidak tersensor dengan $\delta_i = 1$. Sementara itu, 10 pasien lainnya masih tetap hidup lebih dari 15 hari sejak waktu observasi, sehingga waktu ketahanan hidup mereka tersensor dengan $\delta_i = 0$. Data tersebut disajikan dalam tabel di bawah ini.

Tabel 2. Data Rekam Medis 40 Pasien Pasca-Operasi Jantung

Observasi	$\boldsymbol{t_i}$	$\boldsymbol{\delta_i}$	**Observasi**	$\boldsymbol{t_i}$	$\boldsymbol{\delta_i}$
1	2	1	21	15	1
2	1	1	22	31	0
3	1	1	23	18	0
4	4	1	24	49	0
5	5	1	25	9	1
6	10	1	26	15	1
7	14	1	27	7	1
8	21	0	28	3	1
9	7	1	29	10	1
10	9	1	30	5	1
11	30	0	31	18	0
12	11	1	32	45	0
13	14	1	33	1	1
14	44	0	34	12	1
15	15	1	35	7	1
16	4	1	36	28	0
17	6	1	37	4	1
18	11	1	38	41	0
19	13	1	39	12	1
20	9	1	40	10	1

Berdasarkan Tabel 2, status penyensoran $(\delta_i) = 1$ menyatakan bahwa pasien telah meninggal dan status penyensoran $(\delta_i) = 0$ merupakan pasien yang tidak meninggal atau pengamatan tersensor. Langkah pertama sebelum estimasi parameter adalah melakukan uji distribusi Lomax pada data dengan hipotesis sebagai berikut.

$H_0 =$ Data mengikuti distribusi Lomax

$H_1 =$ Data tidak mengikuti distribusi Lomax

Dengan $\alpha = 5\%$ atau $\alpha = 0.05$, didapatkan keputusan menolak H_0 apabila nilai $p - value < \alpha$ atau gagal menolak H_0 apabilai nilai $p - value > \alpha$.

Tabel 3. Hasil Uji Distribusi Lomax

Kolmogorov-Smirnov Distribusi Lomax					
Ukuran Sampel	40				
Nilai Uji Statistik	0.117				
P-Value	0.597				
α	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Nilai Kritis	0.165	0.189	0.210	0.235	0.252

Dengan bantuan *software*, hasil uji distribusi Lomax ditunjukkan pada Tabel 3 dengan nilai $p - value$ sebesar 0,597 pada data waktu ketahanan hidup pasien pasca-operasi jantung. Nilai $p - value$ dari uji kesesuaian distribusi untuk data tersebut lebih besar dari $\alpha = 5\%$ $(p - value > 0.05)$, maka keputusannya adalah gagal menolak H_0. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa data yang digunakan, yaitu waktu ketahanan hidup pasien pasca operasi jantung, mengikuti distribusi Lomax.

Setelah menentukan bentuk distribusi data, selanjutnya melakukan estimasi nilai parameter $\hat{\alpha}$ dan $\hat{\beta}$. Berdasarkan perhitungan menggunakan *software* R, nilai $\hat{\alpha}$ pada data pasien pasca operasi jantung adalah 1,552 dan nilai $\hat{\beta}$ pada data pasien pasca operasi jantung adalah 20,38.

Probabilitas hidup pasien dalam jangka waktu ketahanan hidup tertentu dapat diketahui dengan melakukan analisis *survival*. Analisis *survival* dilakukan dengan mensubstitusikan nilai parameter ke dalam fungsi *survival*, sehingga diperoleh fungsi *survival* untuk pasien pasca operasi jantung sebagai berikut.

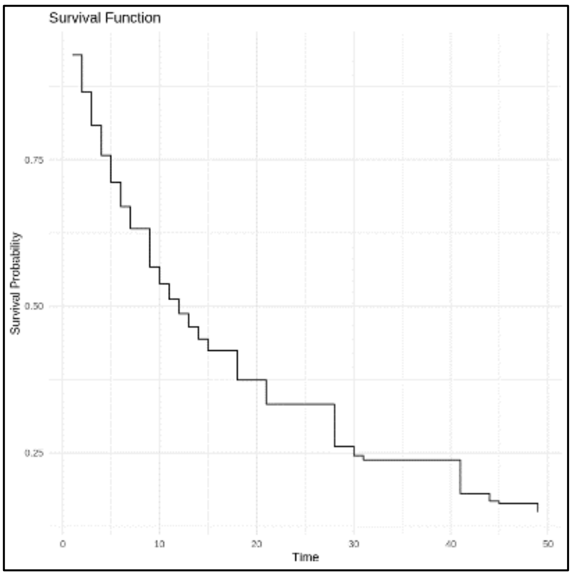
$$S(t) = \left(\frac{20.38}{t + 20.38}\right)^{1.552} \tag{19}$$

Berdasarkan fungsi survival pada persamaan (19), nilai probabilitas survival dapat dilakukan estimasi. Hasil estimasi ditunjukkan pada Tabel 4 sebagai berikut.

Tabel 4. Probabilitas Survival Pada Pasien Pasca-Operasi Jantung

t_i	$S(t)$	t_i	$S(t)$	t_i	$S(t)$
1	0.928	10	0.538	28	0.261
2	0.865	11	0.512	30	0.245
3	0.808	12	0.487	31	0.238
4	0.757	13	0.465	41	0.181
5	0.711	14	0.444	44	0.168
6	0.670	15	0.425	45	0.164
7	0.632	18	0.374	49	0.149
9	0.567	21	0.333		

Grafik probabilitas *survival* pasien pasca operasi jantung diperoleh sebagai berikut.



Gambar 2. Grafik Probabilitas *Survival* Pasien Pasca-Operasi Jantung

Berdasarkan Gambar 2, dapat diamati bahwa grafik fungsi *survival* menurun seiring dengan meningkatnya nilai t_i. Sebagai contoh, pada saat $t = 0$, terlihat bahwa $S(0) = 1$ menandakan adanya kepastian probabilitas seseorang untuk bertahan hidup sebelum dilakukannya operasi jantung. Namun, pada $t = 49$ hari, $S(49) = 0.149$, menunjukkan bahwa probabilitas pasien pasca operasi jantung untuk bertahan hidup selama 49 hari adalah sekitar 14.94%. Oleh karena itu, kita dapat menyimpulkan bahwa semakin lama pasien mengalami pasca-operasi jantung, probabilitas untuk bertahan hidup akan semakin kecil.

Laju terjadinya suatu kejadian pada suatu titik waktu ketahanan hidup tertentu ditentukan dengan analisis *hazard*. Analisis *hazard* dilakukan dengan mensubstitusikan nilai parameter ke dalam fungsi *hazard*, sehingga diperoleh fungsi hazard untuk pasien pasca operasi jantung sebagai berikut.

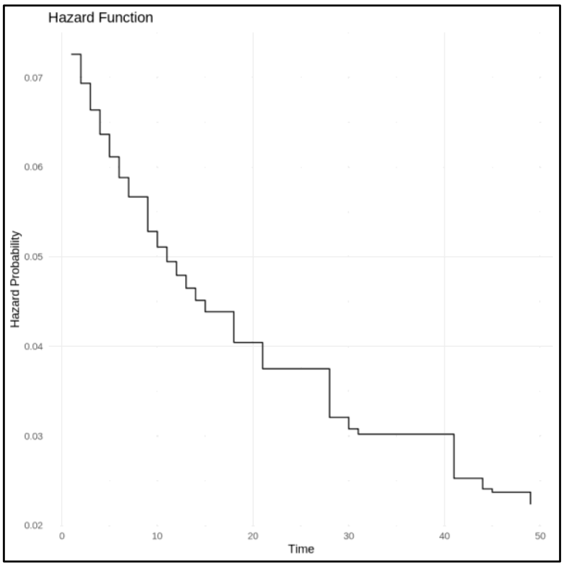
$$h(t) = \frac{1.552}{t + 20.38} \tag{20}$$

Berdasarkan fungsi hazard pada persamaan (20), nilai *hazard* dapat dilakukan estimasi. Hasil estimasi ditunjukkan pada Tabel 5 sebagai berikut.

Tabel 4. Nilai *Hazard* Pada Pasien Pasca-Operasi Jantung

t_i	$h(t)$	t_i	$h(t)$	t_i	$h(t)$
1	0.073	10	0.051	28	0.032
2	0.069	11	0.049	30	0.031
3	0.066	12	0.048	31	0.030
4	0.064	13	0.046	41	0.025
5	0.061	14	0.045	44	0.024
6	0.058	15	0.044	45	0.023
7	0.057	18	0.040	49	0.022
9	0.053	21	0.037		

Grafik nilai *hazard* pasien pasca operasi jantung diperoleh sebagai berikut.



Gambar 3. Grafik *Hazard* Pasien Pasca-Operasi Jantung

Berdasarkan Gambar 3, dapat diamati bahwa grafik fungsi *hazard* menurun seiring dengan meningkatnya nilai t_i. Sebagai contoh, pada $t = 49$ hari, $h(49) = 0.022$, menunjukkan bahwa tingkat kematian pasien pasca operasi jantung pada hari ke-49 adalah sekitar 0.022.

4 Simpulan

Penerapan hasil estimasi parameter fungsi *survival* berdasarkan distribusi Lomax dilakukan pada data sekunder, dengan menggunakan data rekam medis dari 40 pasien pasca operasi jantung tahun 2014 pada suatu Rumah Sakit di Jakarta. Langkah pertama yaitu melakukan estimasi parameter $\hat{\alpha}$ dan $\hat{\beta}$ menggunakan metode estimasi *Maximum Likelihood* dan Newton-Raphson. Hasil estimasi nilai parameter $\hat{\alpha}$ pada data pasien pasca operasi jantung adalah sebesar 1,552 dan hasil estimasi parameter $\hat{\beta}$ pada data pasien pasca operasi jantung adalah sebesar 20,38. Berdasarkan hasil tersebut, dapat disimpulkan bahwa estimasi probabilitas ketahanan hidup pasien pasca operasi jantung selama lebih dari 49 hari adalah sebesar 14,94%.

5 Daftar Pustaka

[1] D. G. Kleinbaum and M. Klein, "Survival Analysis : A Self Learning Text 3th Edition," Berlin, Heidelberg, Springer, 2012.

[2] J. F. Lawless, Statistical Models and Methods for Lifetime Data 2th Edition, Canada: John Wiley & Sons, Inc., 2003.

[3] R. E. Walpole, R. H. Myers, S. L. Myers and K. Ye, Probability & Statistic for Engineers & Scientists, Boston: Prentice Hall, 2012.

[4] N. Balakrishnan and M. Kateri, "On the maximum likelihood estimation of parameters of Weibull distribution based on complete and censored data," *Stat. Probab. Lett,* vol. 78, no. 17, pp. 2971-2975, 2008.

[5] S. Fitria, Helmi and S. W. Rizki, "Estimasi Parameter Model Survival Distribusi Eksponensial Data Tersnesor dengan Metode Maksimum Likelihood dan Bayesian Self," *Buletin Ilmiah Math. Stat, dan Terapannya,* vol. 5, no. 3, pp. 213-220, 2016.

[6] D. Oktaviani, Analisis Survival untuk Data Tersensor Menggunakan Model Distribusi Log-Logistik, Jakarta Timur: Universitas Negeri Jakarta, 2015.

[7] R. F. Sani, F. Yanuar and D. Devianto, "Estimasi Parameter dari Distribusi Lomax menggunakan Metode Bayesian Entropy Loss Fuction," *Lebesgue: JurnalIlmiahPendidikan Matematika, Matematika dan Statistika,* vol. 5, no. 3, pp. 1441-1450, 2024.

[8] M. Salem, W. Emam, Y. Tashkandy, M. Ibrahim, M. M. Ali, H. Goual and H. M. Yousof, "A New Lomax Extension: Properties, Risk Analysis, Censored and Complete Goodness-of-Fit Validation Testing under Left-Skewed Insurance, Reliability and Medical Data," *symmetry,* vol. 15, no. 7, pp. 1-24, 2023.

[9] M. Dehmer and F. Emmert-Streib, "Introduction to Survival Analysis in Practice," *machine leraning & knowledge extraction,* vol. 1, no. 3, pp. 1-26, 2019.

[10] O. M. Stitelman, C. W. Wester, V. D. Gruttola and M. J. v. d. Laan, "Targeted Maximum Likelihood Estimation of Effect Modification Parameters in Survival Analysis," *The Internasional Journal of Biostatistic,* vol. 7, no. 1, pp. 1-34, 2011.

[11] M. Zhou, Empirical Likelihood Method in Survival Analysis, London: CRC Press Taylor & Francis Group, 2016.

[12] B. H. Willis, M. Baragilly and D. Coomar, "Maximum likelihood estimation based on Newton–Raphson iteration for the bivariate random effects model in test accuracy meta-analysis," *Stat. Methods Med. Res,* vol. 29, no. 4, pp. 1197-1211, 2020.

[13] G. H. Givens and J. Hoeting, Computational Statistics., 2nd ed., Wiley, 2012.

[14] R. Wilcox, Introduction to Robust Estimation and Hypothesis Testing, Third Edition, Elsevier, 2011.