

Bifurkasi pada Model Predator-Prey Diskret dengan Fungsi Respon *Ratio-Dependent* dan Pemanenan

Agus Suryanto^{1*}, Vira Hari Krisnawati², Sri Puji Lestari³, Denis Andre Matatula⁴,
Mohammad Fahrurrozy⁵

^{1,2,3,4,5}Departemen Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Brawijaya
e-mail: suryanto@ub.ac.id

Diajukan: 16 Oktober 2024, Diperbaiki: 17 April 2025, Diterima: 29 April 2025

Abstrak

Artikel ini membahas model predator-prey dengan fungsi respon ratio-dependent dan pemanenan pada kedua populasi. Model predator-prey yang berupa sistem persamaan diferensial tersebut didiskretisasi dengan metode Euler. Model waktu diskret yang diperoleh dianalisis dinamikanya dengan menentukan titik-titik tetap dan sifat kestabilannya, serta analisis bifurkasi. Analisis bifurkasi menunjukkan bahwa model waktu diskret dapat mengalami bifurkasi, baik bifurkasi penggandaan-periode maupun bifurkasi Neimark-Sacker, ketika nilai langkah waktu integrasi (h) melintasi nilai kritis. Hasil-hasil analisis telah dikonfirmasi oleh hasil-hasil simulasi numerik yang disampaikan pada bagian akhir artikel ini.

Kata Kunci: analisis kestabilan, bifurkasi penggandaan-periode, bifurkasi Neimark-Sacker.

Abstract

This article discusses a predator-prey model with a ratio-dependent functional response and harvesting in both populations. The differential equation of predator-prey model is discretized using the Euler method. The dynamics of the obtained discrete time model are investigated by determining the fixed points as well as their stability properties, and bifurcation analysis. Bifurcation analysis shows that the discrete time model can experience bifurcation, both period-doubling bifurcation and Neimark-Sacker bifurcation, when the value of time-integration step (h) passes a critical value. The analysis results have been confirmed by our numerical simulation results presented at the end of this article.

Keywords: stability analysis, period-doubling bifurcation, Neimark-Sacker bifurcation.

1 Pendahuluan

Interaksi antara predator-prey merupakan dasar rantai makanan sehingga interaksi tersebut menjadi salah satu topik yang dominan dalam ekologi [1]. Salah satu elemen kunci dalam model predator-prey adalah fungsi respon yang menggambarkan jumlah prey yang dikonsumsi oleh predator per satuan waktu. Pada kasus dimana predator harus berbagi atau bersaing dalam mendapatkan mangsa, fungsi respon yang bergantung pada rasio predator-prey terbukti lebih sesuai dengan hasil eksperimen laboratorium maupun observasi lapangan dibandingkan dengan fungsi respon yang hanya bergantung pada prey saja. Model predator-prey dengan fungsi respon *ratio-dependent* telah banyak dipelajari secara ekstensif dalam beberapa dekade terakhir, dan telah ditunjukkan bahwa model-model tersebut mempunyai dinamika yang sangat kompleks [1-5].

Pemanenan salah satu atau kedua populasi merupakan faktor penting lainnya dalam dinamika predator-prey. Pemanenan sumber daya ekologi biasanya dilakukan untuk pengelolaan hama terpadu pertanian maupun pengelolaan perikanan, kehutanan, dan satwa liar. Xiao dkk. [6] telah mempelajari model predator-prey dengan tingkat pemanenan proporsional. Model predator-prey dengan kebijakan pemanenan predator dengan ambang batas telah ditinjau oleh Panigoro dkk. [7]. Dari sudut pandang ekonomi, model predator-prey dengan pemanenan yang berbeda, yaitu pemanenan prey secara nonlinear, telah dianalisis oleh Guo dkk. [8].

Dengan mempertimbangkan fungsi respon *ratio-dependent* dan pemanenan pada prey dan predator, penulis telah mengajukan model interaksi predator-prey yang didasarkan pada model Lotka-Volterra [9]. Dalam orde satu, model tersebut dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= u(1-u) - \frac{\theta uv}{u+v} - \rho_1 u, \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{\omega uv}{u+v} - \delta v - \rho_2 v,\end{aligned}\tag{1}$$

dengan $u \geq 0, v \geq 0$ tetapi $u + v \neq 0$. $u = u(t)$ dan $v = v(t)$ berturut-turut menyatakan kepadatan prey dan predator pada waktu t . θ, ω , dan δ adalah bilangan real positif yang masing-masing terkait dengan laju pemangsaan prey oleh predator, laju konversi pemangsaan, dan laju kematian alami predator. ρ_1 dan ρ_2 berturut-turut adalah konstanta pemanenan prey dan predator.

Model predator-prey yang telah disebutkan di atas berbentuk sistem persamaan diferensial, yang juga tergolong model waktu kontinu. Dalam model pertumbuhan populasi, jika ukuran populasi cukup kecil, atau populasi tidak memiliki generasi yang tumpang tindih, atau perubahan populasi diamati dalam interval waktu tertentu, maka model waktu diskret akan lebih cocok dan realistis daripada model waktu kontinu [10-13]. Selain itu, penyelesaian numerik model waktu diskret dapat diperoleh dengan lebih mudah, dan model waktu diskret dapat menghasilkan karakteristik dinamika yang lebih kompleks dibandingkan model kontinu. [14-18]. Oleh karena itu, banyak peneliti yang lebih mempertimbangkan model waktu diskret.

Model waktu diskret untuk menjelaskan interaksi predator-prey dengan fungsi respon *ratio-dependent* telah diteliti oleh banyak peneliti. Sebagai contoh, Modokompit dkk. [19] membahas model predator-prey Leslie-Gower diskret yang diperoleh dari metode Euler. Model diskret tersebut dilanjutkan oleh Lajmiri dkk. [20] dengan menambahkan efek pemanenan pada predator. Selanjutnya Rana [21] telah melakukan diskretisasi model predator-prey Lotka-Volterra, tetapi tanpa adanya pemanenan. Model diskret yang diperoleh dengan metode Euler dianalisis, khususnya bifurkasi penggandaan-periode dan bifurkasi Neimark-Sacker yang dikontrol oleh ukuran langkah integrasi. Model diskret tersebut dikembangkan oleh Chakraborty dkk [22] dengan menambahkan efek pemanenan predator. Dengan menetapkan langkah integrasi konstan, model

diskret tersebut dapat mengalami bifurkasi periode-ganda maupun bifurkasi Neimark-Sacker apabila laju pemanenan melintasi nilai kritisnya. Lashkarian dan Sharifabad [23] mempertimbangkan model Lotka-Volterra diskret orde fraksional dengan fungsi respon *ratio-dependent* tanpa pemanenan, dan menunjukkan bahwa model tersebut dapat memiliki dinamika yang lebih kompleks.

Pada artikel ini dibahas model Lotka-Volterra diskret dengan fungsi respon *ratio-dependent* dan pemanenan pada kedua populasi. Model diskret diperoleh dengan metode Euler. Metode Euler dipilih karena kesederhanaannya. Meskipun metode ini sangat sederhana, tetapi seperti yang dijelaskan sebelumnya, model diskret yang diperoleh dapat memiliki perilaku dinamik yang kompleks.

2 Metode Penelitian

Pada artikel ini, model predator-prey (1) didiskretisasi menggunakan skema Euler. Untuk itu dimisalkan bahwa solusi pada saat $t = t_n$ adalah $u(t_n) = u_n$ dan $v(t_n) = v_n$, dengan $t_n = t_0 + nh, n = 0, 1, \dots, N$ dan $h = \Delta t = t_{n+1} - t_n$. Jika model (1) ditinjau pada waktu $t = t_n$ dan turunan pertama didekati dengan metode beda maju, maka diperoleh skema Euler untuk model (1), yaitu

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + h \left(u_n(1 - u_n) - \frac{\theta u_n v_n}{u_n + v_n} - \rho_1 u_n \right), \\ v_{n+1} &= v_n + h \left(\frac{\omega u_n v_n}{u_n + v_n} - \delta v_n - \rho_2 v_n \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Dengan diberikan nilai awal $u(0) = u_0$ dan $v(0) = v_0$, solusi pada langkah-langkah berikutnya, yaitu u_n dan $v_n, n = 1, 2, \dots, N$, dapat diperoleh dengan menerapkan skema Euler (2). Pada artikel ini, pembahasan tidak difokuskan pada bagaimana memperoleh solusi model predator-prey tetapi lebih pada perilaku dinamisnya. Oleh karena itu skema Euler (2) dipandang sebagai sistem dinamik diskret. Berikut adalah langkah-langkah analisis dinamika model tersebut.

1. Menentukan titik tetap model waktu diskret (2). Jika dimisalkan $\hat{E} = (\hat{u}, \hat{v})$ adalah titik tetap, maka titik tetap tersebut dapat diperoleh dengan dengan menyubstitusikan $u_n = \hat{u}$ dan $v_n = \hat{v}, \forall n$ ke dalam model (2) dan menyelesaikan sistem persamaan yang dihasilkan dari langkah tersebut. Titik tetap tersebut eksis jika $\hat{u} \geq 0, \hat{v} \geq 0$ dan $\hat{u} + \hat{v} \neq 0$.
2. Jika model (2) dilinearisasi di sekitar titik tetap $\hat{E} = (\hat{u}, \hat{v})$, maka diperoleh matriks Jacobi

$$J(\hat{E}) = \begin{pmatrix} 1 + h \left(1 - \rho_1 - 2\hat{u} - \frac{\theta \hat{v}}{\hat{u} + \hat{v}} + \frac{\theta \hat{u} \hat{v}}{(\hat{u} + \hat{v})^2} \right) & -h \frac{\theta \hat{u}^2}{(\hat{u} + \hat{v})^2} \\ \frac{h \omega \hat{v}^2}{(\hat{u} + \hat{v})^2} & 1 + h \left(\frac{\omega \hat{u}^2}{(\hat{u} + \hat{v})^2} - (\delta + \rho_2) \right) \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Misalkan T dan D berturut-turut adalah $\text{trace}(J(\hat{E}))$ dan $\text{Det}(J(\hat{E}))$. Persamaan karakteristik matriks Jacobi $J(\hat{E})$ adalah

$$\lambda^2 - T\lambda + D = 0.$$

Sifat kestabilan titik tetap $\hat{E} = (\hat{u}, \hat{v})$ dapat ditentukan dengan menggunakan Teorema 1 berikut.

Teorema 1 [24] Misalkan λ_1 dan λ_2 adalah nilai-nilai eigen matriks Jacobi di titik tetap $\hat{E} = (\hat{u}, \hat{v})$. Maka titik tetap $\hat{E} = (\hat{u}, \hat{v})$

- (i) Stabil asimotik lokal (sink) jika $|\lambda_1| < 1$ dan $|\lambda_2| < 1$;
- (ii) Tidak stabil asimotik lokal (source) jika $|\lambda_1| < 1$ dan $|\lambda_2| < 1$;
- (iii) Tidak stabil pelana jika $|\lambda_1| < 1$ dan $|\lambda_2| > 1$ atau $|\lambda_1| > 1$ dan $|\lambda_2| < 1$;
- (iv) Non-hiperbolik jika $|\lambda_1| = 1$ atau $|\lambda_2| = 1$.

Teorema 2 berikut akan digunakan untuk mengevaluasi nilai-nilai eigen matriks Jacobi.

Teorema 2 [24] Misalkan $F(\lambda) = \lambda^2 - T\lambda + D$ adalah polinom karakteristik matriks Jacobi di titik tetap $\hat{E} = (\hat{u}, \hat{v})$, dan λ_1 dan λ_2 adalah akar-akar karakteristik $F(\lambda) = 0$. Maka

- (i) $|\lambda_1| < 1$ dan $|\lambda_2| < 1$ jika dan hanya jika $F(1) > 0$, $F(-1) > 0$ dan $D < 1$;
- (ii) $|\lambda_1| > 1$ dan $|\lambda_2| > 1$ jika dan hanya jika $F(1) > 0$ dan $D > 1$;
- (iii) $(|\lambda_1| < 1 \text{ dan } |\lambda_2| > 1)$ atau $(|\lambda_1| > 1 \text{ dan } |\lambda_2| < 1)$ jika dan hanya jika $F(1) > 0$ dan $F(-1) < 0$;
- (iv) $|\lambda_1| = 1$ dan $|\lambda_2| \neq 1$ jika dan hanya jika $F(1) > 0$, $F(-1) = 0$ dan $D \neq 0, 2$;
- (v) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ dengan $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$ jika dan hanya jika $F(1) > 0$, $T^2 - D < 0$ dan $D = 1$.

3. Menentukan eksistensi bifurkasi penggandaan-periode (*period-doubling*). Jika suatu sistem mengalami perubahan perilaku dinamik akibat adanya perubahan nilai parameter maka sistem dikatakan mengalami bifurkasi. Bifurkasi dalam artikel ini difokuskan pada bifurkasi yang terkait dengan kestabilan titik tetap, yang salah satunya adalah bifurkasi penggandaan-periode atau bifurkasi *flip*, yaitu bifurkasi yang ditandai dengan hilangnya kestabilan suatu titik tetap dan kemudian muncul titik periode ganda apabila parameter melintasi nilai kritis. Menurut Wiggins [25], suatu titik tetap dari sistem dinamik diskret dua dimensi akan mengalami bifurkasi penggandaan-periode jika salah satu nilai eigen matriks Jacobi di titik tetap tersebut adalah $\lambda_1 = 1$ dan nilai eigen lainnya memenuhi $\lambda_2 \neq \pm 1$.
4. Menentukan eksistensi bifurkasi Neimark-Sacker. Bifurkasi Neimark-Sacker adalah bifurkasi Hopf yang terjadi pada sistem dinamik diskret, yaitu bifurkasi yang ditandai dengan muncul kurva invarian tertutup (orbit periodik) dari suatu titik tetap. Misalkan bahwa matriks Jacobi

suatu sistem dinamik diskret dua dimensi dengan parameter p memiliki persamaan karakteristik $F(\lambda; p) = 0$. Jika pada sistem tersebut diberikan perturbasi kecil $\bar{p} \ll 1$ pada p^* sedemikian hingga $p = p^* + \bar{p}$, maka dimisalkan $\lambda_1(\bar{p})$, $\lambda_2(\bar{p})$ adalah nilai-nilai eigennya. Sistem tersebut akan mengalami bifurkasi Neimark-Sacker jika nilai-nilai eigen memenuhi kondisi berikut [25]:

- a. $\lambda_1(0), \lambda_2(0) \in \mathbb{C}$ dengan $|\lambda_1(0)| = |\lambda_2(0)| = 1$;
 - b. $\frac{d|\lambda_{1,2}(\bar{p})|^2}{d\bar{p}} \Big|_{\bar{p}=0} > 0$; dan
 - c. $\lambda_1^m(0) \neq 1, m = 1, 2, 3, 4$.
5. Melakukan simulasi numerik untuk mengilustrasikan hasil-hasil analitik yang diperoleh.

3 Hasil dan Pembahasan

3.1 Titik Tetap dan Eksistensinya

Untuk mendapatkan titik tetap model waktu diskret (2), sistem persamaan berikut harus diselesaikan

$$\begin{aligned} u &= h + h \left(u(1-u) - \frac{\theta uv}{u+v} - \rho_1 u \right), \\ v &= v + h \left(\frac{\omega uv}{u+v} - \delta v - \rho_2 v \right), \end{aligned} \quad (4)$$

dengan $u \geq 0, v \geq 0$ tetapi $u + v \neq 0$. Dengan cara tersebut, dapat ditunjukkan bahwa model (2) memiliki dua titik tetap, yaitu

- (i) Titik kepunahan predator $E_1 = (1 - \rho_1, 0)$. Titik E_1 eksis jika $\rho_1 < 1$.
- (ii) Titik interior $E^* = (u^*, v^*)$ dengan $u^* = (1 - \rho_1) - \frac{\theta(\omega - (\delta + \rho_2))}{\omega}$, dan $v^* = \frac{(\omega - (\delta + \rho_2))}{(\delta + \rho_2)}$. Titik tetap E^* eksis jika $\omega > (\delta + \rho_2)$ dan $(1 - \rho_1) > \frac{\theta(\omega - (\delta + \rho_2))}{\omega}$. Kondisi terakhir ini dipenuhi oleh salah satu kondisi berikut:

- a. $1 - \rho_1 - \theta < 0$ dan $\omega < \frac{\theta(\delta + \rho_2)}{\theta + \rho_1 - 1}$, atau
- b. $1 - \rho_1 - \theta > 0$.

3.2 Analisis Kestabilan Titik Tetap

Dengan mengevaluasi nilai-nilai eigen matriks Jacobi (3) pada masing-masing titik tetap, sifat kestabilan titik tetap dapat ditentukan dengan menggunakan Teorema 1 dan Teorema 2. Sifat-sifat kestabilan titik tetap dinyatakan dalam teorema-teorema berikut.

Teorema 3 Jika dimisalkan bahwa $h_1 = \frac{2}{1 - \rho_2}$ dan $h_2 = \frac{2}{\delta + \rho_2 - \omega}$, maka titik tetap $E_1 = (1 - \rho_1, 0)$ memiliki sifat kestabilan sebagai berikut:

- (i) E_1 bersifat stabil asimtotik jika $\omega < (\delta + \rho_2)$ dan $h < \min\{h_1, h_2\}$;
- (ii) E_1 bersifat tidak stabil asimtotik jika memenuhi salah satu kondisi berikut
 - a. $\omega > (\delta + \rho_2)$ dan $h > h_1$; atau
 - b. $\omega < (\delta + \rho_2)$ dan $h < \max\{h_1, h_2\}$;
- (iii) E_1 bersifat tidak stabil pelana jika memenuhi salah satu kondisi berikut
 - a. $\omega > (\delta + \rho_2)$ dan $h < h_1$; atau
 - b. $\omega > (\delta + \rho_2)$ dan $\min\{h_1, h_2\} < h < \max\{h_1, h_2\}$;
- (iv) E_1 bertipe non-hiperbolik jika memenuhi salah satu kondisi berikut
 - a. $\omega = (\delta + \rho_2)$; atau
 - b. $\omega < (\delta + \rho_2)$ dan $h = h_2$; atau
 - c. $h = h_1$.

Bukti. Jika titik tetap E_1 disubstitusikan ke dalam matriks Jacobi (3), maka diperoleh

$$J(E_1) = \begin{pmatrix} 1 - h(1 - \rho_1) & -h\theta \\ 0 & 1 + h(\omega - (\delta + \rho_2)) \end{pmatrix}.$$

Nilai-nilai eigen matriks tersebut adalah $\lambda_1 = 1 - h(1 - \rho_1)$ dan $\lambda_2 = 1 + h(\omega - (\delta + \rho_2))$. Karena E_1 eksis jika $\rho_1 < 1$, jelas bahwa $\lambda_1 < 1$. Selain itu, dapat dilihat bahwa jika $h < h_1$ maka $-1 < \lambda_1 < 1$; jika $h = h_1$ maka $\lambda_1 = -1$; dan jika $h > h_1$ maka $\lambda_1 < -1$. Selanjutnya, jika $\omega > (\delta + \rho_2)$ maka $\lambda_2 > 1, \forall h > 0$. Jika $\omega < (\delta + \rho_2)$, maka terdapat tiga kemungkinan, yaitu (1) jika $h < h_2$ maka $-1 < \lambda_2 < 1$; (2) jika $h = h_2$ maka $\lambda_2 = -1$; dan jika $h > h_2$ maka $\lambda_2 < -1$. Dengan memperhatikan nilai-nilai eigen tersebut dan Teorema 1, maka Teorema 3 terbukti. ■

Jika titik tetap E^* disubstitusikan ke persamaan (3), maka diperoleh matriks Jacobi

$$J(E^*) = \begin{pmatrix} 1 + h \left(\frac{1}{\omega^2} [-\omega^2(1 - \rho_1) + \theta(\omega^2 - (\delta + \rho_2)^2)] \right) & -h \frac{\theta(\delta + \rho_2)^2}{\omega^2} \\ h \frac{(\omega - (\delta + \rho_2))^2}{\omega} & 1 + h \frac{(\delta + \rho_2)}{\omega} ((\delta + \rho_2) - \omega) \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Persamaan karakteristik matriks Jacobi (5) adalah

$$F(\lambda) = \lambda^2 - T^* \lambda + D^* = 0, \quad (6)$$

dimana $T^* = 2 + hA$ dan $D^* = 1 + hA + h^2B$ dengan

$$A = \frac{1}{\omega^2} \left(-\omega^2(1 - \rho_1) + (\theta\omega + \theta(\delta + \rho_2) - \omega(\delta + \rho_2))(\omega - (\delta + \rho_2)) \right),$$

$$B = \frac{(\delta + \rho_2)(\delta + \rho_2 - \omega)}{\omega^2} \left(\theta(\omega - (\delta + \rho_2)) - \omega(1 - \rho_1) \right).$$

Dapat ditunjukkan bahwa jika titik tetap E^* eksis maka $B > 0$ dan $F(1) = h^2B > 0$. Oleh karena itu Teorema 2 dapat digunakan untuk menyelidiki sifat-sifat kestabilan titik tetap E^* . Pertama akan dievaluasi nilai-nilai $F(0) = D^* = 1 + hA + h^2B$. Dapat ditunjukkan bahwa (1) $D^* = 1$ jika dan

hanya jika $h = \hat{h}_0$; (2) $D^* < 1$ jika dan hanya jika $h < \hat{h}_0$; dan (3) $D^* > 1$ jika dan hanya jika $h > \hat{h}_0$, dimana $\hat{h}_0 = -A/B$. \hat{h}_0 harus bernilai positif karena terkait dengan langkah waktu integrasi, sehingga A harus bernilai negatif karena $B > 0$, yaitu ketika $\frac{\theta(\omega^2 - (\delta + \rho_2)^2)}{\omega} < \omega(1 - \rho_1) + (\delta + \rho_2)(\omega - (\delta + \rho_2))$.

Nilai-nilai $F(-1)$ sangat bergantung pada nilai $\Delta = T^{*2} - 4D^*$. Jika $\Delta < 0$ maka $F(-1) > 0, \forall h > 0$. Jika $\Delta = 0$ maka $F(-1) > 0, \forall h \neq \hat{h}_0$, dan $F(-1) = 0$ jika $h = \hat{h}_0$. Pada kasus $\Delta > 0$, $F(-1) = 0$ jika dan hanya jika $h = \hat{h}_1$ atau $h = \hat{h}_2$ dengan $\hat{h}_1 = \frac{-A - \sqrt{\Delta}}{B}$ dan $\hat{h}_2 = \frac{-A + \sqrt{\Delta}}{B}$; $F(-1) > 0$ jika dan hanya jika $h < \hat{h}_1$ atau $h > \hat{h}_2$; dan $F(-1) < 0$ jika dan hanya jika $\hat{h}_1 < h < \hat{h}_2$. Dengan hasil-hasil tersebut dan Teorema 2, sifat-sifat kestabilan titik tetap E^* dapat diuraikan seperti pada Teorema 4.

Teorema 4 Misalkan $\frac{\theta(\omega^2 - (\delta + \rho_2)^2)}{\omega} < \omega(1 - \rho_1) + (\delta + \rho_2)(\omega - (\delta + \rho_2))$. Titik tetap $E^* = (u^*, v^*)$ memiliki sifat kestabilan sebagai berikut:

- (i) Titik tetap E^* bersifat stabil asimtotik jika berlaku salah satu kondisi berikut
 - a. $\Delta < 0$ dan $h < \hat{h}_0$; atau
 - b. $\Delta \geq 0$ dan $h < \hat{h}_1$.
- (ii) Titik tetap E^* bersifat tidak stabil asimtotik jika berlaku salah satu kondisi berikut
 - a. $\Delta > 0$ dan $h > \hat{h}_2$; atau
 - b. $\Delta \leq 0$ dan $h > \hat{h}_0$.
- (iii) Titik tetap E^* bersifat tidak stabil pelana jika $\Delta > 0$ dan $\hat{h}_1 < h < \hat{h}_2$.
- (iv) E_1 bertipe non-hiperbolik jika memenuhi salah satu kondisi berikut
 - a. $\Delta > 0$, $h = \hat{h}_1$ dan $2 + hA \neq 0, -2$; atau
 - b. $\Delta > 0$, $h = \hat{h}_2$ dan $2 + hA \neq 0, -2$; atau
 - c. $\Delta < 0$ dan $h = \hat{h}_0$.

3.3 Bifurkasi Penggandaan-Periode dan Bifurkasi Neimark-Sacker

Pada bagian ini akan dilakukan analisis bifurkasi penggandaan-periode (period-doubling) dan bifurkasi Neimark-Sacker yang terjadi di sekitar titik tetap E_1 dan E^* dengan memilih h sebagai parameter bifurkasi.

3.3.1 Bifurkasi Penggandaan-Periode

Teorema 5

- (i) Titik tetap E_1 kehilangan kestabilan melalui bifurkasi penggandaan-periode ketika $h = h_1$, $\omega \neq (\delta + \rho_2)$ dan $h \neq h_2$.
- (ii) Misalkan $\frac{\theta(\omega^2 - (\delta + \rho_2)^2)}{\omega} < \omega(1 - \rho_1) + (\delta + \rho_2)(\omega - (\delta + \rho_2))$. Titik tetap E^* kehilangan kestabilan melalui bifurkasi penggandaan-periode ketika $A^2 > 4B$, $h = \hat{h}_1$ atau $h = \hat{h}_2$ dan $h \neq -\frac{2}{A}, -\frac{4}{A}$.

Bukti. (i) Dari analisis kestabilan diketahui bahwa matriks Jacobi (3) di titik tetap E_1 memiliki nilai eigen $\lambda_1 = 1 - h(1 - \rho_1)$ dan $\lambda_2 = 1 + h(\omega - (\delta + \rho_2))$. Jelas bahwa $\lambda_1 = -1$ ketika $h = h_1$ dan $\lambda_2 \neq \pm 1$ jika $\omega \neq (\delta + \rho_2)$ atau $h \neq h_2$.

(ii) Matriks Jacobi (3) di titik tetap E^* ditunjukkan oleh persamaan (5). Persamaan karakteristik matriks Jacobi tersebut dapat ditulis menjadi

$$\lambda^2 - (2 + hA)\lambda + (1 + hA + h^2B) = 0.$$

Dapat ditunjukkan bahwa jika $A^2 > 4B$ dan $h = \hat{h}_1$ atau $h = \hat{h}_2$, maka nilai eigen matriks Jacobi (5) adalah $\lambda_1 = -1$ dan $\lambda_2 = 3 + hA$. Bifurkasi penggandaan-periode terjadi jika $\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 \neq \pm 1$. Oleh karena itu bifurkasi penggandaan-periode terjadi jika $A^2 > 4B$ dan $h = \hat{h}_1$ atau $h = \hat{h}_2$, dan $h \neq -\frac{2}{A}, -\frac{4}{A}$. Kondisi

$$\frac{\theta(\omega^2 - (\delta + \rho_2)^2)}{\omega} < \omega(1 - \rho_1) + (\delta + \rho_2)(\omega - (\delta + \rho_2))$$

menjamin bahwa $\hat{h}_1, \hat{h}_2, -\frac{2}{A}, -\frac{4}{A} > 0$. ■

3.3.2 Bifurkasi Neimark-Sacker

Bagian ini membahas kondisi keberadaan bifurkasi Neimark-Sacker dengan menggunakan teorema bifurkasi [25], dengan h sebagai parameter bifurkasi. Salah satu syarat terjadinya bifurkasi Neimark-Sacker adalah matriks Jacobi yang dievaluasi pada titik tetap harus bernilai kompleks berpasangan. Dari bahasan sebelumnya diketahui bahwa matriks Jacobi di titik tetap E_1 bernilai real sehingga tidak mungkin terjadi bifurkasi di sekitar titik tetap E_1 . Oleh karena itu pembahasan bifurkasi Neimark-Sacker dilakukan hanya di sekitar titik tetap E^* . Untuk itu perhatikan bahwa matriks Jacobi di titik tetap E^* memiliki persamaan karakteristik (7). Jika pada model diskret (2) diberikan perturbasi kecil $\tilde{h} \ll 1$ pada \hat{h}_0 sedemikian hingga $h = \hat{h}_0 + \tilde{h}$, maka persamaan karakteristik (6) dapat ditulis sebagai

$$F(\lambda; \tilde{h}) = \lambda^2 - (2 + (\hat{h}_0 + \tilde{h})A)\lambda + (1 + (\hat{h}_0 + \tilde{h})A + (\hat{h}_0 + \tilde{h})^2B) = 0,$$

sehingga akar-akar karakteristiknya akan bergantung pada \tilde{h} dan ditulis sebagai $\lambda_{1,2}(\tilde{h})$. Pemenuhan kondisi terjadinya bifurkasi Neimark- Sacker pada sistem diskret (2) di sekitar titik tetap E^* diuraikan sebagai berikut.

- (i) Dari bahasan sebelumnya telah ditunjukkan bahwa jika $\Delta < 0 \Leftrightarrow A^2 < 4B$ dan $h = \hat{h}_0$ maka $F(\lambda; 0) = 0$ memiliki sepasang akar kompleks, yaitu $\lambda_1(0), \lambda_2(0) = \overline{\lambda_1(0)} \in \mathbb{C}$ dengan $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$;
- (ii) Dengan asumsi bahwa $\frac{\theta(\omega^2 - (\delta + \rho_2)^2)}{\omega} < \omega(1 - \rho_1) + (\delta + \rho_2)(\omega - (\delta + \rho_2))$, dapat ditunjukkan bahwa $\varphi = \frac{d|\lambda_{1,2}(\tilde{h})|^2}{d\tilde{h}} \Big|_{\tilde{h}=0} = -2\hat{h}_0 B = -2A > 0$;
- (iii) Kondisi $\lambda_1^m(0) \pm 1, m = 1, 2, 3, 4$ ekuivalen dengan kondisi $-(2 + \hat{h}_0 A) \neq -2, 0, 1, 2$. Jika $A^2 < 4B$ maka $\hat{h}_0^2(A^2 < 4B) = (2 + \hat{h}_0 A)^2 - 4(1 + \hat{h}_0 A + \hat{h}_0^2 B^2) < 0$. Karena $1 + \hat{h}_0 A + \hat{h}_0^2 B^2 = 1$, diperoleh $-(2 + \hat{h}_0 A) \neq \pm 2$. Selanjutnya, kondisi $-(2 + \hat{h}_0 A) \neq 0, 1$ ekuivalen dengan $\hat{h}_0 A \neq -2, -3$.

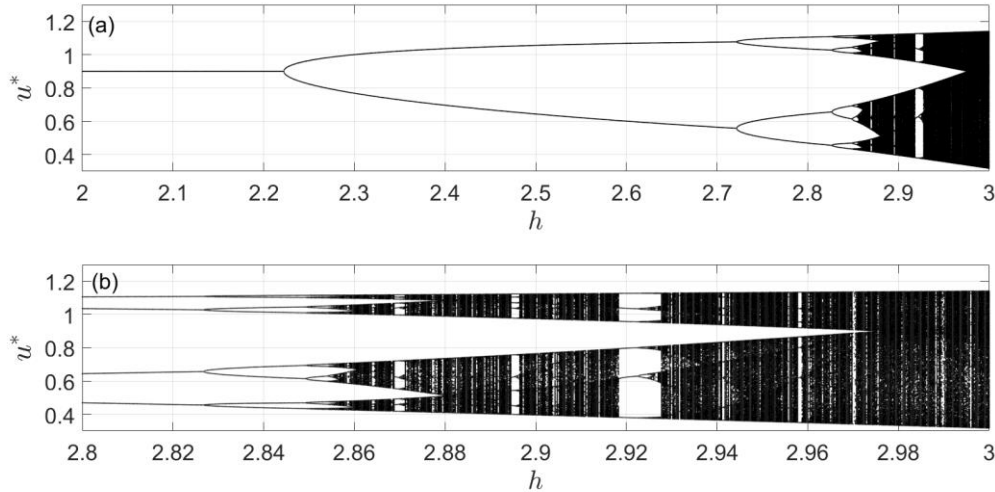
Berdasarkan analisis di atas, eksistensi bifurkasi Neimark-Sacker dapat dinyatakan dalam Teorema 6 berikut.

Teorema 6 Model diskret (2) mengalami bifurkasi Neimark-Sacker di sekitar titik tetap E^* jika $A^2 < 4B, h = \hat{h}_0$, dan $h \neq h_4, h_5$ dengan $h_4 = -\frac{2}{A}$ dan $h_5 = -\frac{3}{A}$.

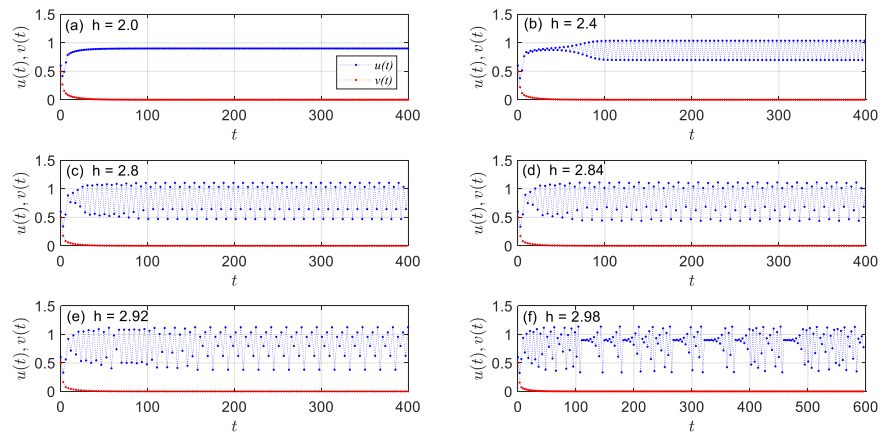
3.4 Simulasi Numerik

Pada bagian ini dilakukan simulasi untuk mengilustrasikan dan mengonfirmasi hasil-hasil analisis sebelumnya. Simulasi pertama ditujukan untuk mengonfirmasi adanya bifurkasi periode ganda. Untuk itu, pada simulasi pertama ini digunakan nilai-nilai parameter yang memenuhi Teorema 5(i), yaitu $\theta = 1, \omega = 0.4, \rho_1 = 0.1, \delta = 0.2$ dan $\rho_2 = 0.25$ dan dengan nilai awal $u(0) = 0.6, v(0) = 0.5$. Pada kasus ini, model waktu diskret (2) memiliki titik tetap kepunahan predator $E_1 = (0.9, 0)$ tetapi tidak memiliki titik tetap interior E^* . Titik tetap E_1 bersifat stabil asimtotik untuk $h < \min\{h_1 = 2.2222, h_2 = 40\} = 2.2222$. Karena $\omega \neq (\delta + \rho_2)$, model diskret (2) akan mengalami bifurkasi penggandaan-periode ketika h melewati h_1 . Untuk melihat pengaruh langkah waktu integrasi (h) tersebut, parameter h divariasikan dalam interval $h \in [2.0, 3.0]$. Perilaku ini dapat dilihat dengan jelas pada diagram bifurkasi dalam bidang (h, u^*) , lihat Gambar 1. Bifurkasi dalam bidang (h, v^*) tidak ditampilkan karena penyelesaian $v(t)$ selalu konverge ke $v^* = 0$. Pada Gambar 1 terlihat jelas bahwa titik tetap E_1 stabil untuk $h < h_1$, kehilangan kestabilan pada $h = h_1$, dan kemudian muncul rangkaian orbit periode 2, 4, 8, 16, dan akhirnya dilanjutkan dengan kemunculan orbit *chaos* yang tidak beraturan

dengan jendela periode yang tidak pasti. Fenomena ini dapat diamati dengan jelas pada Gambar 1.(b). Kemunculan periode ganda juga dapat diamati dari penyelesaian temporal $u(t)$ dan $v(t)$ yang ditunjukkan pada Gambar 2. Gambar 2 menunjukkan bahwa bergantung pada nilai h , penyelesaian $u(t)$ dapat konvergen ke titik tetap E_1 , titik-titik periode 2, 4, 8, 16 atau tidak konvergen (yaitu terjadi *chaos*). Sebaliknya, penyelesaian $v(t)$ tidak bergantung pada nilai h dan selalu konvergen ke $v^* = 0$.



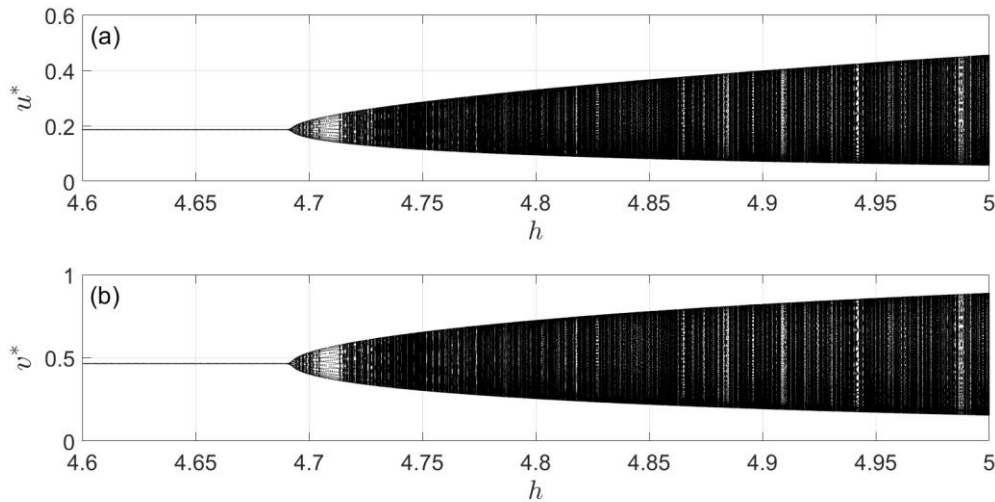
Gambar 1. (a) Diagram bifurkasi dalam bidang (h, u^*) dari model diskret (2) dengan $\theta = 1$, $\omega = 0.4$, $\rho_1 = 0.1$, $\delta = 0.2$, dan $\rho_2 = 0.25$ dengan (a) $h \in [2.0, 3.0]$, dan (b) $h \in [2.8, 3.0]$.



Gambar 2. Penyelesaian temporal model waktu diskret (2) dengan $\theta = 1$, $\omega = 0.4$, $\rho_1 = 0.1$, $\delta = 0.2$, dan $\rho_2 = 0.25$ dengan beberapa nilai h yang berbeda.

Selanjutnya, dilakukan simulasi untuk menunjukkan adanya bifurkasi Neimark-Sacker sehingga dipilih nilai-nilai parameter yang memenuhi Teorema 6. Dalam hal ini, nilai-nilai parameter yang digunakan adalah $\theta = 1$, $\omega = 0.7$, $\rho_1 = 0.1$, $\delta = 0.1$, dan $\rho_2 = 0.1$. Pada kasus ini, model diskret (2) memiliki titik tetap kepunahan predator $E_1 = (0.9, 0)$ dan titik tetap

interior $E^* = (0.1857, 0.4643)$. Titik tetap E_1 tidak stabil, sedangkan titik tetap E^* stabil apabila $h < \hat{h}_0 = 4.6923$. Simulasi dilakukan dengan menggunakan nilai awal yang sama dengan sebelumnya, yaitu $u(0) = 0.5, v(0) = 0.6$. Dapat ditunjukkan bahwa nilai-nilai parameter dalam simulasi ini memberikan $A = -0.1245 < 0, B = 0.0265 > 0$ dan $\Delta = -0.0906 < 0$. Selain itu juga diperoleh $h_4 = 16.0656$ dan $h_5 = 24.0984$. Oleh karena itu, semua kondisi pada Teorema 6 terpenuhi, dan model diskret (2) mengalami bifurkasi Neimark-Sacker di sekitar E^* ketika h melewati \hat{h}_0 . Fenomena ini jelas terlihat pada diagram bifurkasi, lihat Gambar 3. Pada Gambar 3.(a) dan 3.(b) berturut-turut ditunjukkan diagram bifurkasi dalam bidang (h, u^*) dan (h, v^*) . Kedua gambar tersebut menunjukkan bahwa titik bifurkasi Neimark-Sacker adalah $h = \hat{h}_0$. Dapat dilihat bahwa penyelesaian model waktu diskret (2) akan konvergen ke titik tetap E^* jika $h < \hat{h}_0$ dan penyelesaian $u(t)$ maupun $v(t)$ konvergen ke kurva periodik jika $h > \hat{h}_0$. Fenomena ini dapat dilihat dengan lebih detail pada potret fasa pada Gambar 4. Konvergensi ke titik tetap maupun ke solusi periodik untuk beberapa h yang berbeda dapat dilihat dengan jelas pada Gambar 4.

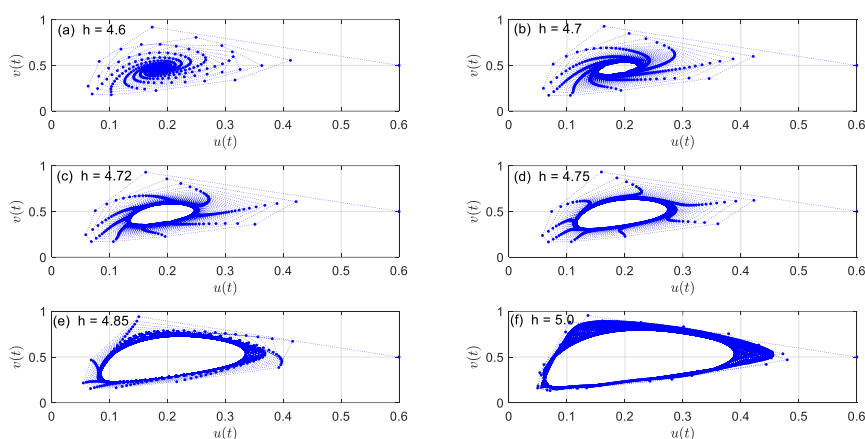


Gambar 3. Diagram bifurkasi dalam (a) bidang (h, u^*) , dan (b) bidang (h, v^*) dari model waktu diskret (2) dengan $\theta = 1, \omega = 0.7, \rho_1 = 0.1, \delta = 0.1$, dan $\rho_2 = 0.1$ dengan $h \in [4.6, 5.0]$.

4 Simpulan

Model predator-prey dengan fungsi respon ratio-dependent dan pemanenan pada kedua populasi telah didiskretisasi menggunakan metode Euler. Telah ditunjukkan bahwa model waktu diskret yang diperoleh memiliki dua titik tetap yang tepat sama dengan model waktu kontinu, yaitu titik kepunahan predator (E_1) dan titik interior (E^*). Titik-titik tetap tersebut bersifat stabil

asimtotik bersyarat. Berbeda dengan model waktu kontinu, titik-titik tetap model waktu diskret yang diperoleh dari metode Euler memiliki kondisi kestabilan yang tidak hanya bergantung pada parameter model tetapi juga pada langkah waktu integrasi numerik (h). Ketika nilai h melewati nilai kritis, titik tetap E_1 kehilangan kestabilan melalui bifurkasi penggandaan-periode. Di sekitar titik tetap E^* , jika nilai h melewati nilai kritis maka model diskret dapat mengalami bifurkasi penggandaan-periode atau bifurkasi Neimark-Sacker. Hasil-hasil analisis tersebut telah dikonfirmasi oleh hasil-hasil simulasi numerik.



Gambar 4. Potret fasa model waktu diskret (2) dengan $\theta = 1, \omega = 0.7, \rho_1 = 0.1, \delta = 0.1$, dan $\rho_2 = 0.1$ dengan beberapa nilai h yang berbeda.

5 Ucapan Terima Kasih

Penelitian ini dibiayai oleh Dana Internal Fakultas MIPA Universitas Brawijaya berdasarkan surat perjanjian Nomor : 2612.25/UN01.F09/PN/2024.

6 Daftar Pustaka

- [1] E. Beretta and Y. Kuang, "Global analysis in some delayed ratio-dependent predator-prey systems," *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, vol. 32, no. 3, pp. 381-408, 1998.
- [2] Y. Kuang and E. Beretta, "Global qualitative analysis of a ratio-dependent predator-prey system," *Journal of Mathematical Biology*, vol. 36, pp. 389-406, 1998.
- [3] K. Das, M. N. Srinivas, and N.H. Gazi, "Diffusion dynamics and impact of noise on a discrete-time ratio-dependent model: An analytical and numerical approach," *Mathematical and Computational Applications*, vol. 24, no. 4, article no. 103, 2019.
- [4] A. Tassaddiq, M. S. Shabbir, Q. Din, K. Ahmad and S. Kazi, "A Ratio-Dependent

- Nonlinear Predator-Prey Model With Certain Dynamical Results," *IEEE Access*, vol. 8, pp. 195074-195088, 2020.
- [5] A. Claudio, P. Aguirre, J. Flores and P. Heijster, "Bifurcation analysis of a predator-prey model with predator intraspecific interactions and ratio-dependent functional response," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 402, pp. 1–20, 2021.
- [6] D. Xiao, W. Li and M. Han, "Dynamics in a ratio-dependent predator–prey model with predator harvesting," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 324. no. 1, pp. 14-29, 2006.
- [7] H.S. Panigoro, A. Suryanto, W.M. Kusumawinahyu and I. Darti, "A Rosenzweig–MacArthur model with continuous threshold harvesting in predator involving fractional derivatives with power law and Mittag–Leffler kernel," *Axioms*, vol. 9, no. 4, pp. 122, 2020.
- [8] H. Guo, J. Han and G. Zhang, "Hopf bifurcation and control for the bioeconomic predator–prey model with square root functional response and nonlinear prey harvesting," *Mathematics*, vol 11, no. 24, pp. 4958, 2023.
- [9] A. Suryanto, I. Darti, H.S. Panigoro and A. Kilicman, "A fractional-order predator–prey model with ratio-dependent functional response and linear harvesting," *Mathematics*, vol. 2019, no. 7, pp. 1100, 2019.
- [10] J. Ren, L. Yu and S. Siegmund, "Bifurcations and chaos in a discrete predator–prey model with Crowley–Martin functional response," *Nonlinear Dynamics*, vo. 90, pp. 19–41, 2017.
- [11] T. Huang, H. Zhang, H. Yang, N. Wang and F. Zhang, "Complex patterns in a space- and time-discrete predator-prey model with Beddington-DeAngelis functional response," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 43, pp. 182–199, 2017.
- [12] J. Huang, S. Liu, S. Ruan and D. Xiao, "Bifurcations in a discrete predator–prey model with nonmonotonic functional response," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 464, pp. 201–230, 2018.
- [13] Q. Din, "Complexity and chaos control in a discrete-time prey–predator model," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 49, pp. 113–134, 2017.
- [14] Q. Cui, Q. Zhang, Z. Qiu and Z. Hu, "Complex dynamics of a discrete-time predator-prey system with Holling IV functional response," *Chaos Solitons & Fractals*, vol. 87, pp. 158–171, 2016.
- [15] X. Zhuo and F. Zhang, "Stability for a new discrete ratio-dependent predator–prey system,"

-
- Qualitative Theory of Dynamical Systems*, vol. 17, pp. 189–202, 2018.
- [16] I. Darti and A. Suryanto, "Stability preserving non-standard finite difference scheme for a harvesting Leslie-Gower predator–prey model," *Journal of Difference Equations and Applications*, vol. 21, pp. 528–534, 2015.
 - [17] I. Darti and A. Suryanto, "Dynamics preserving nonstandard finite difference method for the modified Leslie-Gower predator-prey model with Holling–type II functional response," *The Far East Journal of Mathematical Sciences*, vol. 99, pp. 719–733, 2016.
 - [18] M. S. Shabbir, Q. Din, M. A. Khan, M. A. Khan and K. Ahmad, "A dynamically consistent nonstandard finite difference scheme for a predator–prey model," *Advances Difference Equations*, vol. 2019, Article no. 381, 2019.
 - [19] R. Mokodompit, Nurwan and E. Ramli, "Bifurkasi periode ganda dan Neimark-Sacker pada model diskret Leslie-Gower dengan fungsi respon ratio-dependent," *Limits*, vol. 17, no. 1, pp. 19–33, 2020.
 - [20] Z. Lajmiri, R.K. Ghaziani and I. Orak, "Bifurcation and stability analysis of a ratio-dependent predator-prey model with predator harvesting rate," *Chaos Solitons & Fractals*, vol. 106, pp. 193–200, 2018.
 - [21] S.M.S. Rana, "Chaotic dynamics and control of discrete ratio-dependent predator-prey system," *Discrete Dynamics in Nature and Society*, vol. 2017, Article ID 4537450, 2017.
 - [22] P. Chakraborty, U. Ghosh and S. Sarkar, "Stability and bifurcation analysis of a ratio dependent discrete prey–predator model with linear harvesting," *Proceeding the 4th International Conference on Recent Advances in Information Technology (RAIT), IEEE*, pp. 1–7, 2018.
 - [23] R. S. Lashkarian and D. B. Sharifabad, "Discretization of a fractional order ratio-dependent functional response predatorprey model, bifurcation and chaos," *Computational Methods for Differential Equations*, vol. 6, no. 2, pp. 248–265, 2018.
 - [24] A.C.J. Luo, *Regularity and Complexity in Dynamical Systems*, Springer New York, NY, 2012.
 - [25] S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, 2nd Ed. Springer, New York, NY, 2003.