Limits: Journal of Mathematics and Its Applications
E-ISSN: 2579-8936
P-ISSN: 1829-605X
Vol. 22, No. 2, Juli 2025, 33-43
DOI: https://doi.org/10.12962/limits.v22i2.3455

Dimensi Metrik pada Graf Bintang Kipas dan Graf Bunga Sepatu

Layinatu Khusniyatinna'im [1], Tri Atmojo Kusmayadi [2] *, Titin Sri Martini [3]
[1,2,3]Universitas Sebelas Maret; Jl Ir. Sutami No.36, Kentingan Jebres, Surakarta, Jawa Tengah
[1,2,3]Program Studi Matematika FMIPA UNS Surakarta
e-mail: tri.atmojo.kusmayadi@staff.uns.ac.id

Diajukan: 26 Juni 2023, Diperbaiki: 3 Juni 2025, Diterima: 2 Juli 2025

Abstrak

Misalkan G adalah suatu graf *connected* dengan himpunan *vertex* $V(G)$ dan himpunan *edge* $E(G)$. Jarak antara dua *vertex* berbeda $v, w \in V(G)$, dinotasikan dengan $d(v,w)$, adalah panjang lintasan terpendek antara v dan w di G. Misalkan $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\} \subseteq V(G)$ adalah subhimpunan dari $V(G)$. Untuk setiap $v \in V(G)$, representasi *vertex* v terhadap W didefinisikan sebagai k-pasang terurut $r(v|W) = \big(d(v,w_1), d(v,w_2), \dots, d(v,w_k)\big)$. Himpunan W dikatakan sebagai himpunan pembeda dari G jika untuk setiap dua *vertex* berbeda $x, y \in V(G)$ berlaku $r(x|W) \neq r(y|W)$. Himpunan dengan kardinalitas terkecil disebut himpunan pembeda minimum atau basis dari G. Kardinalitas dari basis di G didefinisikan sebagai dimensi metrik, dinotasikan dengan $dim(G)$. Penelitian ini bertujuan untuk mencari dimensi metrik pada graf bintang kipas $S(m, F_n, v)$ dan graf bunga sepatu Hf^n. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah kajian pustaka yang diperoleh dari berbagai sumber. Berdasarkan hasil penelitian, dimensi metrik pada graf bintang kipas $S(m, F_n, v)$ yaitu $2m$ untuk $m \geq 3$ dan $n = 4,5$ dan $\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil m$ untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$ $(n \neq 4,5)$, kemudian dimensi metrik pada graf bunga sepatu Hf^n yaitu 7 untuk $n = 3$ dan $2n + 2$ untuk $n \geq 4$.

Kata Kunci: dimensi metrik, himpunan pembeda, basis, graf bintang kipas, graf bunga sepatu

Abstract

Let G be a connected graph with vertex set $V(G)$ and edge set $E(G)$. The distance from two distinct vertices $v, w \in V(G)$, denoted by $d(v,w)$, is the length of the shortest path from v and w in G. Let $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\} \subseteq V(G)$ be an ordered subset of $V(G)$. For any vertex $v \in V(G)$, the representation of vertex v with respect to W is defined as k-ordered pairs $r(v|W) = \big(d(v,w_1), d(v,w_2), \dots, d(v,w_k)\big)$. The set W is said to be the resolving set of G if every two vertices differ $x, y \in V(G)$ then $r(x|W) \neq r(y|W)$. The basis of G is the resolving set of G with the smallest cardinality. The cardinality of the base G is defined as metric dimension, and is denoted by $\dim(G)$. This research aims to find the metric dimension of fan star graph and hibiscus graph. The research method in this research is a literature study. The result of this research are as follow the metric dimension of the fan star graph are $2m$ for $m \geq 3$ and $n = 4,5$ and $\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil m$ for $m \geq 3$ dan $n \geq 3$ $(n \neq 4,5)$, then the metric dimension of the hibiscus graph are 7 for $n = 3$ and $2n + 2$ for $n \geq 4$.

***Keywords**: metric dimension, resolving set, basis, fan star graph, hibiscus graph*

1 Pendahuluan

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang berkembang luas dan dapat diterapkan secara nyata dalam kehidupan sehari-hari. Seperti contohnya dapat diterapkan dalam topologi jaringan bidang ilmu komputer, riset operasi dan komunikasi. Menurut Chartrand dan Lesniak [1], suatu graf G adalah himpunan tak kosong berhingga $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ yang disebut dengan himpunan *vertex* dan $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ yang merupakan himpunan pasangan tak berurutan dari anggota-anggota V yang disebut dengan *edge*. *Vertex* merupakan representasi dari titik dan *edge* merupakan representasi dari sisi.

Bidang teori graf yang menarik perhatian banyak peneliti dan berkembang saat ini salah satunya adalah mengenai materi dimensi metrik. Dimensi metrik muncul pertama kalinya diperkenalkan oleh Slater pada tahun 1975 [2] dengan konsep himpunan pembeda yang disebut dengan *locating set*. Kemudian pada tahun 1976, Harary dan Melter [3] secara independen juga memperkenalkan konsep yang sama dengan himpunan pembeda yang disebut dengan *resolving set*. Slater mendefinisikan himpunan pembeda W sebagai himpunan dari *vertex-vertex* di graf G sedemikian sehingga setiap *vertex* di G menghasilkan jarak yang berbeda terhadap setiap *vertex* di W. kardinalitas terkecil dari himpunan pembeda disebut dengan dimensi metrik.

Menurut Chartrand *et al*. [4], misalkan G adalah sebuah graf terhubung dengan *vertex* $V(G)$ dan himpunan *edge* $E(G)$. Jarak antara dua *vertex* berbeda $v, w \in V(G)$, dinotasikan dengan $d(v, w)$, adalah panjang lintasan terpendek antara v dan w di G. Misalkan $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\} \subseteq V(G)$ adalah subhimpunan dari $V(G)$. Untuk setiap $v \in V(G)$, representasi *vertex* v terhadap W didefinisikan sebagai k-pasang terurut $r(v|W) = \big(d(v, w_1), d(v, w_2), \dots, d(v, w_k)\big)$. Himpunan W dikatakan sebagai himpunan pembeda dari G jika untuk setiap dua *vertex* berbeda $x, y \in V(G)$ berlaku $r(x|W) \neq r(y|W)$. Himpunan dengan kardinalitas terkecil disebut himpunan pembeda minimum atau basis dari G. Kardinalitas dari basis di G didefinisikan sebagai dimensi metrik, dinotasikan dengan $dim(G)$.

Banyak peneliti yang menerapkan konsep dimensi metrik ini pada kelas-kelas graf tertentu. Pada tahun 2000, Chartrand *et al.* [4] telah meneliti dimensi metrik pada graf lintasan P_n dan graf *complete* K_n yang memiliki n *vertex* dengan hasil yaitu $dim(G) = 1$ jika dan hanya jika $G = P_n$ $(n \geq 2)$ dan $dim(G) = n - 1$ jika dan hanya jika $G = K_n$ $(n \geq 2)$. Pada tahun 2003, Buczkowski *et al.* [5] membuktikan dimensi metrik pada graf *wheel* W_n dengan hasil yaitu $dim(G) = 3$ untuk $n = 3,6$ dan $dim(G) = \left\lfloor \frac{2n+2}{5} \right\rfloor$ untuk n lainnya. Pada tahun 2018, Wijaya dan Kusmayadi [6] menemukan dimensi metrik pada hasil operasi amalgamasi pada graf *sunflower* dan graf lollipop dan graf *caveman*. Pada tahun 2019, Sabila dan Kusmayadi [7] menemukan dimensi metrik pada graf *broken fan* diperumum dan hasil operasi *edge corona* pada graf *path* dan graf bintang. Kemudian pada tahun 2020, Sari dan Kusmayadi [8] menemukan dimensi metrik pada graf *starbarbell* dan hasil operasi *edge corona* pada graf *cycle* dan graf *path*. Secara umum dalam menentukan dimensi metrik untuk sebarang graf adalah sangat sulit. Garey and Johnson (1979) [9] dan juga Khuller *et al*. (1996) [10] menunjukkan bahwa untuk menentukan dimensi metrik dari sebarang graf adalah merupakan masalah *NP-complete*. Bahkan masalah itu juga masih *NP-complete* jika dikenakan pada beberapa kelas tertentu dari graf, seperti graf bipartit (Manuel *et al*., 2008) [11], atau graf planar (Diaz *et al*., 2012) [12]. Penelitian-penelitian tersebut menjadi dasar acuan dalam penelitian ini pada kelas graf yang lain. Kelas graf yang akan diteliti pada penelitian ini adalah graf bintang kipas dan graf bunga sepatu. Berikut diberikan definisi dari graf bintang kipas dan graf bunga sepatu.

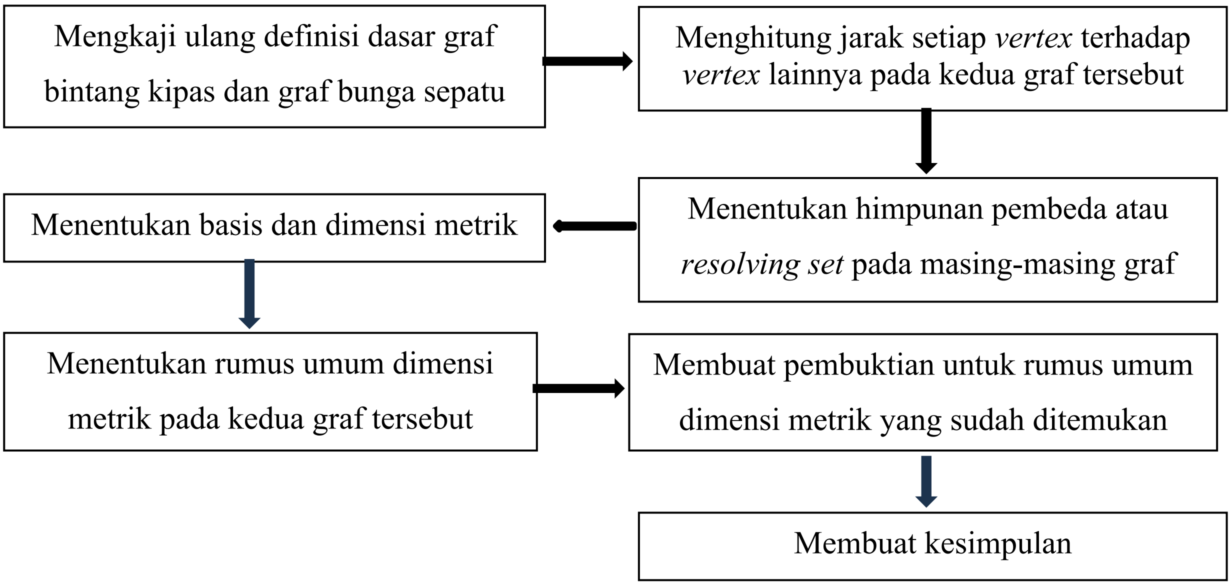
Definisi 1 [13] *Graf bintang kipas* $S(m, F_n, v)$ *merupakan gabungan dari graf bintang* S_m *dan graf kipas* F_n *dengan menempelkan satu titik di* F_n *pada masing-masing* v_i *dimana* $i = 1, 2, \dots, m$ *pendant dari* S_m. *Memiliki himpunan vertex* $V\big(S(m, F_n, v)\big) = \{a, v_i, v_{i,j} \big| 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\}$ *dan himpunan edge* $E\big(S(m, F_n, v)\big) = \{av_i, v_iv_{i,j}, v_{i,j}v_{i,j+1} \big| 1 \le i \le m, 1 \le j \le n-1\} \cap \{av_{i,j}, v_iv_{i+1}, v_{i,j}v_{i,j+2}\}$.

Definisi 2 [14] *Graf bunga sepatu* $\boldsymbol{Hf^n}$ *merupakan graf yang dibentuk dari graf kincir angin belanda* $\boldsymbol{C_4^{(n)}}$ *dengan menambahkan* $\boldsymbol{n}$ *simpul daun yang terhubung dengan pusat persekutuan* $\boldsymbol{x_0}$. *Graf bunga sepatu memiliki* $\boldsymbol{4n+1}$ *vertex dan* $\boldsymbol{5n}$ *edge yang terdiri dari himpunan vertex* $\boldsymbol{V(Hf^n) = V(X) \cup V(Y)}$ dengan $\boldsymbol{V(X) = \{x_0, x_i^1, x_i^2, x_i^3 \big| i = 1, 2, \dots, n\}}$, dan $\boldsymbol{V(Y) = \{y_i, 1 \le i \le n\}}$ *serta himpunan edge* $\boldsymbol{E\big(Hf^{(n)}\big) = \{x_0x_i^j, 1 \le i \le n, j = 1, 3\} \cup \{x_i^jx_i^2 \,|1 \le i \le n, j = 1, 3\} \cup \{x_0\, y_i | 1 \le i \le n\}}$.

2 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah kajian pustaka yaitu mengumpulkan berupa buku-buku, jurnal maupun tulisan-tulisan yang dimuat dalam situs *web*. Dari metode tersebut dapat ditentukan dimensi metrik pada gaf bintang kipas $S(m, F_n, v)$ dan graf bunga sepatu Hf^n.

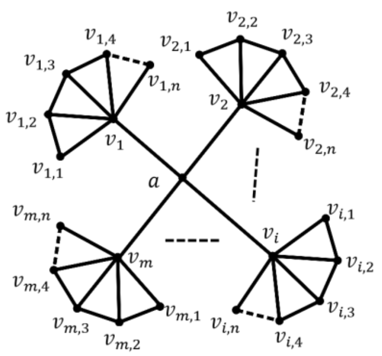
Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini diuraikan seperti pada diagram berikut.



3 Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini akan diurakan mengenai dimensi metrik pada graf bintang kipas dan graf bunga sepatu sehingga diperoleh rumus umumnya, disertai dengan pembuktian tiap rumus umum yang telah diperoleh tersebut.

Berdasarkan Definisi 1 bentuk umum dari graf bintang kipas ditunjukkan pada Gambar 1 berikut.



Gambar 1. Graf Bintang Kipas $\boldsymbol{S(m, F_n, v)}$

Teorema 1 *Diberikan graf bintang kipas* $\boldsymbol{S(m, F_n, v)}$ *dengan* $\boldsymbol{m \geq 3}$ *dan* $\boldsymbol{n \geq 3}$ *maka berlaku*

$$\boldsymbol{dim\big(S(m, F_n, v)\big) = \begin{cases} 2m, & m \geq 3 \; dan \; n = 4, 5 \\ \left\lceil \dfrac{n-1}{2} \right\rceil m, & m \geq 3 \; dan \; n \geq 3 \; (n \neq 4, 5) \end{cases}}$$

Bukti. Diberikan graf bintang kipas dengan $\boldsymbol{m, n}$ merupakan bilangan bulat dan $\boldsymbol{m, n \geq 3}$. Misal graf bintang memiliki himpunan *vertex* $\boldsymbol{V(S_m) = \{a, v_1, v_2, \ldots, v_m\}}$ dan graf kipas memiliki himpunan *vertex* $\boldsymbol{V(F_n) = \{v_{1,1}, v_{1,2}, \ldots, v_{m,n}\}}$, sehingga graf $\boldsymbol{S(m, F_n, v)}$ memiliki *order*

$|\boldsymbol{S(m, F_n, v)}| = \boldsymbol{mn + m + 1}$ dengan himpunan *vertex* $\boldsymbol{V(S(m, F_n, v)) = V(S_m) \cup V(F_n)}$. Maka terdapat dua kasus sebagai berikut.

1. Kasus $\boldsymbol{m \geq 3}$ dan $\boldsymbol{n = 4, 5}$

   Misal diambil $\boldsymbol{W = \{v_{1,1}, v_{1,2}, v_{2,1}, v_{2,2}, \dots, v_{m,1}, v_{m,2}\}}$, diperoleh representasi dari setiap *vertex* di $\boldsymbol{S(m, F_n, v)}$ terhadap $\boldsymbol{W}$ berbeda, yakni

$$\boldsymbol{r(a|W) = (2, 2, 2, 2, \dots, 2, 2), r(v_1|W) = (1, 1, 3, 3, \dots, 3, 3), r(v_2|W) = (3, 3, 1, 1, \dots, 3, 3), \dots,}$$

$$\boldsymbol{r(v_m|W) = (3, 3, 3, 3, \dots, 1, 1), r(v_{1,1}|W) = (0, 1, 4, 4, \dots, 4, 4), r(v_{1,2}|W) = (1, 0, 4, 4, \dots, 4, 4), \dots, r(v_{1,n}|W) = (2, 2, 4, 4, \dots, 4, 4), r(v_{2,1}|W) = (4, 4, 0, 1, \dots, 4, 4), r(v_{\{2,2\}}|W) = (4, 4, 1, 0, \dots, 4, 4), \dots, r(v_{2,n}|W) = (4, 4, 2, 2, \dots, 4, 4), r(v_{3,1}|W) = (4, 4, 4, 4, \dots, 0, 1), r(v_{3,2}|W) = (4, 4, 4, 4, \dots, 1, 0), \dots, r(v_{m,n}|W) = (4, 4, 4, 4, \dots, 2, 2).}$$

   diperoleh $\boldsymbol{dim(S(m, F_n, v)) \leq 2m}$. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa graf $\boldsymbol{S(m, F_n, v)}$ tidak memiliki $\boldsymbol{|W| \leq 2m}$. Andaikan $\boldsymbol{W}$ adalah basis dari graf bintang kipas $\boldsymbol{S(m, F_n, v)}$ dengan $\boldsymbol{|W| \leq 2m}$. Terdapat tiga kemungkinan pemilihan *vertex* di $\boldsymbol{W}$ sebagai berikut.

   1. Jika semua *vertex* dari himpunan $\boldsymbol{W}$ termasuk dalam $\boldsymbol{V(F_n) = \{v_{i,j} | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\} \subset V(S(m, F_n, v))}$ maka terdapat paling sedikit dua *vertex* $\boldsymbol{x \in V(S(m, F_n, v))}$ dan $\boldsymbol{y \in V(S(m, F_n, v))}$ sedemikin sehingga $\boldsymbol{r(x|W) = r(y|W) = (4, 4, 4, 4, \dots, 2)}$.
   2. Jika semua *vertex* dari himpunan $\boldsymbol{W}$ termasuk dalam $\boldsymbol{V(F_n) = \{v_{i,j} | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\} \subset V(S(m, F_n, v))}$ dan beberapa *vertex* yang lain termasuk dalam $\boldsymbol{V(S\_m) = \{a, v_i | 1 \leq i \leq m\} \subset V(S(m, F_n, v))}$ maka terdapat paling sedikit dua *vertex* $\boldsymbol{x \in V(S(m, F_n, v))}$ dan $\boldsymbol{y \in V(S(m, F_n, v))}$ sedemikin sehingga $\boldsymbol{r(x|W) = r(y|W) = (3, 3, 3, 3, \dots, 4)}$.
   3. Jika semua *vertex* dari himpunan $\boldsymbol{W}$ termasuk dalam $\boldsymbol{V(S_m) = \{a, v_i | 1 \leq i \leq m\}}$ maka terdapat paling sedikit dua *vertex* $\boldsymbol{x \in V(S(m, F_n, v))}$ dan $\boldsymbol{y \in V(S(m, F_n, v))}$ sedemikin sehingga $\boldsymbol{r(x|W) = r(y|W) = (1, 3, 3, 3, \dots, 3)}$.

   Semua kemungkinan pemilihan *vertex* akan menghasilkan representasi yang sama, sehingga $\boldsymbol{W}$ bukan basis. Hal ini kontradiksi. Maka $\boldsymbol{dim(S(m, F_n, v)) \geq 2m}$. Dari hasil yang diperoleh, terbukti bahwa $\boldsymbol{dim(S(m, F_n, v)) = 2m}$ untuk $\boldsymbol{m \geq 3}$ dan $\boldsymbol{n = 4, 5}$.

2. Kasus $\boldsymbol{m \geq 3}$ dan $\boldsymbol{n \geq 3 (n \neq 4, 5)}$

   (a) Ditunjukkan $\boldsymbol{dim(S(m, F_n, v) \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor m}$

   Misal $\boldsymbol{m, n = 3}$, diambil $\boldsymbol{W = \{v_{1,1}, v_{2,1}, v_{3,1}\}}$, diperoleh representasi dari setiap vertex di $\boldsymbol{S(m, F\_n, v)}$ terhadap $\boldsymbol{W}$ berbeda, yakni

   $$\boldsymbol{r(a|W) = (2,2,2), r(v_1|W) = (1,3,3), r(v_2|W) = (3,1,3),}$$

   $$\boldsymbol{r(v_3|W) = (3,3,1), r(v_{1,1}|W) = (0,4,4), r(v_{1,2}|W) = (1,4,4),}$$

   $$\boldsymbol{r(v_{1,3}|W) = (2,4,4), r(v_{2,1}|W) = (4,0,4), r(v_{2,2}|W) = (4,1,4),}$$

   $$\boldsymbol{r(v_{2,3}|W) = (4,2,4), r(v_{3,1}|W) = (4,4,0), r(v_{3,2}|W) = (4,4,1),}$$

   $$\boldsymbol{r(v_{3,3}|W) = (4,4,2)}$$

   Berikutnya misal dipilih $\boldsymbol{W = \{v_{1,(n-2)}, v_{1,n}, \dots, v_{2,(n-2)}, v_{2,n}, \dots, v_{(m-1),(n-2)}, v_{(m-1),n}, \dots,}$ $\boldsymbol{v_{m,(n-2)}, v_{m,n}\}}$, diperoleh representasi dari setiap *vertex* di $\boldsymbol{S(m, F_n, v)}$ terhadap $\boldsymbol{W}$ berbeda, yakni

   $\boldsymbol{r(v_{1,(n-2)}|W) = (2,0,\dots,4,4,\dots,4,4,\dots,4,4)}$, $\boldsymbol{r(v_{1,n}|W) =}$ $\boldsymbol{(2,2,\dots,4,4,\dots,4,4,\dots,4,4)}$, … ,

   $\boldsymbol{r(v_{2,(n-2)}|W) = (4,4,\dots,2,0,\dots,4,4,\dots,4,4)}$, $\boldsymbol{r(v_{2,n}|W) =}$ $\boldsymbol{(4,4,\dots,2,2,\dots,4,4,\dots,4,4)}$, … ,

   $$\boldsymbol{r(v_{(m-1),(n-2)}|W) = (4,4,\dots,4,4,\dots,2,0,\dots,4,4), r(v_{(m-1),n}|W) =}$$
   $$\boldsymbol{(4,4,\dots,4,4,\dots,2,2,\dots,4,4), \dots, r(v_{m,(n-2)})|W) = (4,4,\dots,4,4,\dots,4,4,\dots,2,0),}$$

   $$\boldsymbol{r(v_{m,n}|W) = (4,4,\dots,4,4,\dots,4,4,\dots,2,2).}$$

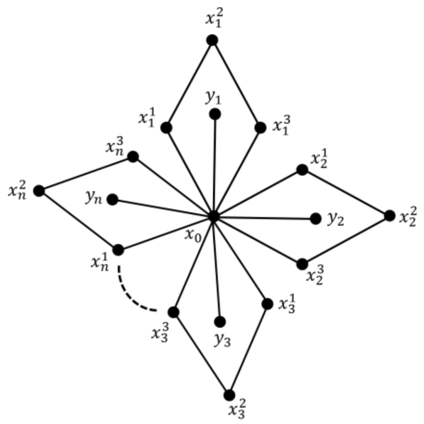
   Setiap *vertex* $\boldsymbol{V(S(m, F_n, v))}$ memiliki representasi yang berbeda terhadap $\boldsymbol{W}$ maka $\boldsymbol{W}$ adalah himpunan pembeda dengan $\boldsymbol{|W| = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor m}$. Oleh karena itu, $\boldsymbol{\dim(S(m, F_n, v)) \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor m}$.

   (b) Ditunjukkan $\boldsymbol{dim(S(m, F_n, v)) \geq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor m}$

   Dibuktikan dengan kontradiksi. Asumsikan $\boldsymbol{W}$ adalah himpunan pembeda dari $\boldsymbol{S(m, F_n, v)}$ dengan $\boldsymbol{|W| < \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor m}$. Jika $\boldsymbol{W = \{a, v_1, v_2, \dots, v_m\}}$ maka terdapat paling sedikit dua *vertex* $\boldsymbol{x \in V(S(m, F_n, v))}$ dan $\boldsymbol{y \in V(S(m, F_n, v))}$ sedemikian sehingga $\boldsymbol{r(x|W) = r(y|W) = (2,1,3,3,\dots,3)}$. Jika $\boldsymbol{W = \{v_{1,1}, v_{1,2}, \dots, v_{m,n}\}}$ maka terdapat paling sedikit dua *vertex* $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{F_n}, \boldsymbol{v}))$ dan $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{V}(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{F_n}, \boldsymbol{v}))$ sedemikian sehingga $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{W}) = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{W}) = (\mathbf{4}, \mathbf{4}, \mathbf{4}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \mathbf{4})$. Jika $\boldsymbol{W} = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_m}, \boldsymbol{v_{1,1}}, \boldsymbol{v_{1,2}}, \dots, \boldsymbol{v_{m,n}}\}$ maka terdapat paling sedikit dua *vertex* $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{F_n}, \boldsymbol{v}))$ dan $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{V}(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{F_n}, \boldsymbol{v}))$ sedemikian sehingga $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{W}) = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{W}) = (\mathbf{4}, \mathbf{4}, \mathbf{4}, \mathbf{4}, \dots, \mathbf{4})$. Hal ini kontradiksi dengan pengandaian. Oleh karena itu $\mathbf{dim}(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{F_n}, \boldsymbol{v})) \geq \left\lfloor \frac{\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \right\rfloor \boldsymbol{m}$.

Dari hasil yang diperoleh, terbukti bahwa $\mathbf{dim}(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{F_n}, \boldsymbol{v})) = \left\lfloor \frac{\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \right\rfloor \boldsymbol{m}$ untuk $\boldsymbol{m} \geq \mathbf{3}$ dan $\boldsymbol{n} \geq \mathbf{3} (\boldsymbol{n} \neq \mathbf{4}, \mathbf{5})$.

Bedasar Definisi 2, bentuk umum dari graf bunga sepatu ditunjukkan pada Gambar 2 berikut.



Gambar 2. Graf Bunga Sepatu (Hf^n)

Teorema 2 *Diberikan graf bunga sepatu* $\boldsymbol{Hf^n}$ *dengan* $\boldsymbol{n} \geq \mathbf{3}$, *maka berlaku*

$$\boldsymbol{dim}(\boldsymbol{Hf^n}) = \begin{cases} \mathbf{7}, \boldsymbol{n} = \mathbf{3} \\ \mathbf{2}\boldsymbol{n} + \mathbf{2}, \boldsymbol{n} \geq \mathbf{4} \end{cases}$$

Bukti. Diberikan graf bunga sepatu dengan $\boldsymbol{n}$ merupakan bilangan bulat dan $\boldsymbol{n} \geq \mathbf{3}$. Misal graf bunga sepatu memiliki himpunan *vertex* $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{Hf^n}) = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{X}) \cup \boldsymbol{V}(\boldsymbol{Y})$ dengan $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{X}) = \{\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{x_i^1}, \boldsymbol{x_i^2}, \boldsymbol{x_i^3} | \boldsymbol{i} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \boldsymbol{n}\}$, dan $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{Y}) = \{\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}, \dots, \boldsymbol{y_n}\}$. Maka terdapat dua kasus sebagai berikut.

1. Kasus $\boldsymbol{n} = \mathbf{3}$

   Misal diambil $\boldsymbol{W} = \{\boldsymbol{x_2^2}, \boldsymbol{x_3^2}, \boldsymbol{x_1^1}, \boldsymbol{x_2^1}, \boldsymbol{x_3^1}, \boldsymbol{y_2}, \boldsymbol{y_3}\}$ diperoleh representasi dari setiap *vertex* di $\boldsymbol{Hf^n}$ terhadap $\boldsymbol{W}$, yakni

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x_0}|\boldsymbol{W}) = (\mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}), \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x_1^2}|\boldsymbol{W}) = (\mathbf{4}, \mathbf{4}, \mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{3}, \mathbf{3}, \mathbf{3}), \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x_2^2}|\boldsymbol{W}) = (\mathbf{0}, \mathbf{4}, \mathbf{3}, \mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{3}, \mathbf{3}),$$

$$r(x_3^2|W) = (4,0,3,3,1,3,3), r(x_1^1|W) = (3,3,0,2,2,2,2), r(x_1^3|W) = (3,3,2,2,2,2,2),$$

$$r(x_2^1|W) = (1,3,2,0,2,2,2), r(x_2^3|W) = (1,3,2,2,2,2,2), r(x_3^1|W) = (3,1,2,2,0,2,2),$$

$$r(x_3^3|W) = (3,1,0,2,2,2,2), r(y_1|W) = (3,3,2,2,2,2,2), r(y_2|W) = (3,3,2,2,2,0,2),$$

$$r(y_3|W) = (3,3,2,2,2,2,0).$$

Setiap *vertex* $V(Hf^n)$ memiliki representasi yang berbeda terhadap W, maka W adalah himpunan pembeda dengan 7 elemen. Selanjutnya akan ditunjukkan Hf^n tidak memiliki himpunan pembeda dengan 6 elemen. Andaikan Hf^n memiliki himpunan pembeda dengan 6 elemen, maka terdapat tiga kemungkinan pemilihan *vertex* dari W. Misal $V(X) = V(X_1) \cup V(X_2)$ dengan $V(X_1) = \{x_0, x_i^2 \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ dan $V(X_2) = \{x_i^1, x_i^3 \mid i = 1, 2, \dots, n\}$

(a) Jika semua *vertex* dari himpunan $\boldsymbol{W}$ termasuk dalam $V(X_1)$ dan beberapa dalam $V(X_2)$ maka terdapat paling sedikit dua *vertex* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{V}(\boldsymbol{Hf^n})$ sedemikian sehingga $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{W}) = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{W}) = (\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{3}, \mathbf{3}, \mathbf{2}, \mathbf{2})$.

(b) Jika semua *vertex* dari himpunan $\boldsymbol{W}$ termasuk dalam $V(X_1)$ dan beberapa dalam $V(Y)$ maka terdapat paling sedikit dua *vertex* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{V}(\boldsymbol{Hf^n})$ sedemikian sehingga $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{W}) = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{W}) = (\mathbf{3}, \mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{2})$.

(c) Jika semua *vertex* dari himpunan $\boldsymbol{W}$ termasuk dalam $V(X_2)$ dan beberapa dalam $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{Y})$ maka terdapat paling sedikit dua *vertex* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{V}(\boldsymbol{Hf^n})$ sedemikian sehingga $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{W}) = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{W}) = (\mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{2})$.

Dari semua kemungkinan, hasil yang diperoleh menyatakan kontradiksi dengan pengandaian. Oleh karena itu, $\boldsymbol{Hf^n}$ tidak memiliki himpunan pembeda 6 elemen. Maka terbukti $\boldsymbol{dim}(\boldsymbol{Hf^n}) = \mathbf{7}$.

2. Kasus $\boldsymbol{n} \geq \mathbf{4}$

a. Ditunjukkan $\boldsymbol{dim}(\boldsymbol{Hf^n}) \leq \mathbf{2}\boldsymbol{n} + \mathbf{2}$

Misal $\boldsymbol{W} = \{\boldsymbol{x_{n-2}^2}, \boldsymbol{x_{n-1}^2}, \boldsymbol{x_n^2}, \boldsymbol{x_1^1}, \boldsymbol{x_2^1}, \dots, \boldsymbol{x_{n-1}^1}, \boldsymbol{x_n^1}, \boldsymbol{y_{n-2}}, \boldsymbol{y_{n-1}}, \boldsymbol{y_n}\}$, diperoleh representasi dari setiap *vertex* di $\boldsymbol{Hf^n}$ terhadap $\boldsymbol{W}$, yakni

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x_o}|\boldsymbol{W}) = (\mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}), \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x_1^2}|\boldsymbol{W}) = (\mathbf{4}, \mathbf{4}, \mathbf{4}, \mathbf{1}, \mathbf{3}, \dots, \mathbf{3}, \mathbf{3}, \mathbf{3}, \mathbf{3}, \mathbf{3}), \dots,$$

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x_{n-2}^2}|\boldsymbol{W}) = (\mathbf{0}, \mathbf{4}, \mathbf{4}, \mathbf{3}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{3}, \mathbf{3}, \mathbf{3}, \mathbf{3}, \mathbf{3}), \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x_{n-1}^2}|\boldsymbol{W}) = (\mathbf{4}, \mathbf{0}, \mathbf{4}, \mathbf{3}, \mathbf{3}, \dots, \mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{3}, \mathbf{3}, \mathbf{3}),$$

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x_n^2}|\boldsymbol{W}) = (\mathbf{4}, \mathbf{4}, \mathbf{0}, \mathbf{3}, \mathbf{3}, \dots, \mathbf{3}, \mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{3}, \mathbf{3}), \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x_1^1}|\boldsymbol{W}) = (\mathbf{3}, \mathbf{3}, \mathbf{3}, \mathbf{0}, \mathbf{2}, \dots, \mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{2}),$$

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x_1^3}|\boldsymbol{W}) = (\mathbf{3}, \mathbf{3}, \mathbf{3}, \mathbf{2}, \mathbf{2}, \dots, \mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{2}), \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x_2^1}|\boldsymbol{W}) = (\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{3}, \mathbf{2}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{2}),$$

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x_2^3}|\boldsymbol{W}) = (\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{3}, \mathbf{2}, \mathbf{2}, \dots, \mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{2}), \dots, \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x_{n-1}^1}|\boldsymbol{W}) = (\mathbf{3}, \mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{2}, \mathbf{2}, \dots, \mathbf{0}, \mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{2}), \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x_{n-1}^3}|\boldsymbol{W}) = (\mathbf{3}, \mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{2}, \mathbf{2}, \dots \mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{2}),$$

$$\boldsymbol{r(x_n^1|W) = (3,3,1,2,2,\ldots,2,0,2,2,2), r(x_n^3|W) =}$$
$$\boldsymbol{(3,3,1,2,2,\ldots,2,2,2,2,2), r(y_1|W) = (3,3,3,2,2,\ldots,2,2,2,2,2), \ldots,}$$
$$r(y_{n-2}|W) = (3,3,3,2,2,\ldots,2,2,0,2,2), r(y_{n-1}|W) =$$
$$(3,3,3,2,2,\ldots,2,2,2,0,2), r(y_n|W) = (3,3,3,2,2,\ldots,2,2,2,2,0).$$

Setiap vertex $\mathbf{V(Hf^n)}$ memiliki representasi yang berbeda terhadap $\mathbf{W}$ maka $\mathbf{W}$ adalah himpunan pembeda dengan $\mathbf{|W| = 2n + 2}$. Oleh karena itu $\mathbf{dim(Hf^n) \leq 2n + 2}$.

b. Ditunjukkan $\boldsymbol{\dim(Hf^n) \geq 2n + 2}$

Dibuktikan dengan kontradiksi. Asumsikan $\boldsymbol{W}$ adalah himpunan pembeda dari $\boldsymbol{Hf^n}$, dengan $\boldsymbol{|W| < 2n + 2}$. Jika $\boldsymbol{W = \{x_0, x_1^2, \ldots, x_n^2\}}$ maka terdapat paling sedikit dua *vertex* $\boldsymbol{x, y \in V(Hf^n)}$ sedemikian sehingga $\boldsymbol{r(x|W) = r(y|W) = (1,3,3,\ldots,3)}$. Jika $\boldsymbol{W = \{x_1^1, x_1^3, \ldots, x_i^j, 1 \leq i \leq n, j = 1,3\}}$, maka terdapat paling sedikit dua *vertex* $\boldsymbol{x, y \in V(Hf^n)}$ sedemikian sehingga $\boldsymbol{r(x|W) = r(y|W) = (2,2,2,\ldots,2)}$. Jika $\boldsymbol{W = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}}$, maka terdapat paling sedikit dua *vertex* $\boldsymbol{x, y \in V(Hf^n)}$ sedemikian sehingga $\boldsymbol{r(x|W) = r(y|W) = (3,3,3,\ldots,3)}$. Jika $\boldsymbol{W = \{x_0, x_1^2, \ldots, x_n^2\} \cup \{x_1^1, x_1^3, \ldots, y_i^j, 1 \leq i \leq n, j = 1,3\}}$, maka terdapat paling sedikit dua *vertex* sedemikian sehingga $\boldsymbol{r(x|W) = r(y|W) = (1,3,3,\ldots,2,2)}$. Jika $\boldsymbol{W = \{x_0, x_1^2, \ldots, x_n^2\} \cup \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}}$, maka terdapat paling sedikit dua *vertex* sedemikian sehingga $\boldsymbol{r(x|W) = r(y|W) = (1,1,3,\ldots,2,2)}$. Jika $\boldsymbol{W = \{y_1^1, y_1^2, \ldots, y_i^j, 1 \leq i \leq n, j = 1,2\} \cup \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}}$, maka terdapat paling sedikit dua *vertex* $\boldsymbol{x, y \in V(Hf^n)}$ sedemikian sehingga $\boldsymbol{r(x|W) = r(y|W) = (2,2,2,\ldots,2,2)}$. Hal itu kontradiksi dengan pengandaian. Oleh karena itu $\boldsymbol{\dim(Hf^n) \geq 2n + 2}$.

Dari hasil yang diperoleh, terbukti bahwa $\boldsymbol{dim(Hf^n) = 2n + 2}$ untuk $\boldsymbol{n \geq 4}$.

4 Simpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan dapat disimpulkan bahwa dimensi metrik pada graf Bintang Kipas $S(m, F_n, v)$ hanya tergantung dari banyaknya graf pembentuk kipasnya untuk banyaknya vertex dari lintasan graf kipasnya adalah 4 atau 5. Selain itu dimensi metrik nya tergantung dari banyaknya kipas dan panjang lintasan graf kipasnya. Sedangkan dimensi metrik pada graf Bunga Sepatu Hf^n tergantung pada banyaknya pendant vertex nya dan *cycle* C_4 sebagai graf pembentuknya.

5 Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terimakasih kepada Universitas Sebelas Maret atas dukungan sarana dan prasarana dalam penelitian ini.

6 Daftar Pustaka

[1] G. Chartrand and L. Lesniak, *Graphs & Digraphs*, 3rd ed., vol. 33, no. 4. Chapman & Hall/CRC, USA, 1996. doi: 10.1016/s0898-1221(97)90011-0.

[2] P. J. Slater, “Leave of Trees,” *Congr. Numer.*, vol. 14, pp. 549–559, 1975.

[3] F. Harary and R. A. Melter, “On the Metric Dimension of a Graph,” *Ars Comb. 2*, pp. 191–195, 1976.

[4] G. Chartrand, L. Eroh, M. A. Johnson, and O. R. Oellermann, “Resolvability in Graphs and the Metric Dimension of a Graph,” *Discret. Appl. Math.*, vol. 105, no. 1–3, pp. 99–113, 2000, doi: 10.1016/S0166-218X(00)00198-0.

[5] P. Buczkowski, G. Chartrand, C. Poisson, and P. Zhang, “On k-Dimensional Graphs and Their Bases,” *Period. Math. Hungarica*, vol. 46, no. 1, pp. 9–15, 2003, doi: https://doi.org/10.1023/a:1025745406160.

[6] S. A. Wijaya and T. A. Kusmayadi, “On the Metric Dimension of Amalgamation of Sunflower and Lollipop Graph and Caveman Graph,” *J. Phys. Conf. Ser.*, vol. 1306, no. 1, 2019, doi: 10.1088/1742-6596/1306/1/012035.

[7] M. Sabila and T. A. Kusmayadi, “On the Metric Dimension of Generalized Broken Fan Graph and Edge Corona Product of Path with Star Graph,” *J. Phys. Conf. Ser.*, vol. 1306, no. 1, 2019, doi: 10.1088/1742-6596/1306/1/012017.

[8] P. D. Sari and T. A. Kusmayadi, “Dimensi Metrik Pada Graf Starbarbell dan Hasil Operasi Edge Corona Pada Graf Cycle dan Graf Path,” *J. Mat.*, vol. 10, no. 1, pp. 32–43, 2020, doi: 10.24843/jmat.2020.v10.i01.p121.

[9] M. R. Garey and D. S. Johnson, *Computers and Intractibility : A Guide to The Theory of NP Completeness*, 1st ed. W.H. Freeman and Company, 1979. [Online]. Available: https://perso.limos.fr/~palafour/PAPERS/PDF/Garey-Johnson79.pdf

[10] S. Khuller, B. Raghavachari, and A. Rosenfeld, “‘Landmarks in graphs,’” *Discret. Appl. Math.*, vol. 70, no. 3, pp. 217–229, 1996, doi: 10.1016/0166-218X(95)00106-2.

[11] P. D. Manuel, M. I. Abd-El-Barr, I. Rajasingh, and B. Rajan, “An Efficient Representation of Benes Networks and Its Applications,” *J. Discret. Algorithms*, vol. 6, no. 1, pp. 11–19, 2008, doi: 10.1016/j.jda.2006.08.003.

[12] J. Diaz, O. Pottonen, M. Serna, and E. J. Van Leeuwen, “On the Complexity of Metric Dimension,” *Proc. ESA 2010 LNCS*, vol. 7501, no. 1, pp. 419–430, 2012, doi: https://doi.org/10.1007/978-3-642-33090-237.

[13] A. W. Bustan and A. N. M. Salman, “The Rainbow Vertex-Connection Number of Star Fan Graphs,” *CAUCHY J. Mat. Murni dan Apl.*, vol. 5, no. 3, pp. 112–116, 2018, doi: 10.18860/ca.v5i3.5516.

[14] F. Alyani and H. Jusra, “Pelabelan Harmonis Ganjil Pada Graf Diamond dan Graf Bunga Sepatu (Laporan Penelitian Dasar Keilmuan),” *Univ. Muhammadiyah Prof. Dr. Hamka*, p. 10, 2019, [Online]. Available: https://simakip.uhamka.ac.id/publication/collections/penelitianinternal/detail/1024/pelabelan-harmonis-ganjil-pada-graf