Limits: Journal of Mathematics and Its Applications
E-ISSN: 2579-8936
P-ISSN: 1829-605X
Vol. 22, No. 2, Juli 2025, 45-53
DOI: https://doi.org/10.12962/limits.v22i2.3462

Bilangan Kromatik Lokasi Graf Tentakel

Monika Rianti Helmi [1], Azizah Riana Putri [2], Syafrizal Sy [3*]
[1,2,3]Departemen Matematika dan Sains Data, FMIPA, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis, Pauh, Padang, Indonesia.
e-mail: [1]monikariantihelmi@sci.unand.ac.id, [2]2010433011_azizah@student.unand.ac.id,
[3*]syafrizalsy@sci.unand.ac.id

Diajukan: 7 Juli 2024, Diperbaiki: 16 Juni 2025, Diterima: 14 Juli 2025

Abstrak

Bilangan kromatik lokasi graf diperkenalkan oleh Chartrand dkk. pada tahun 2002, yang merupakan pengembangan dua konsep, yaitu pewarnaan titik dan dimensi partisi dari suatu graf. Bilangan kromatik lokasi graf merupakan pengelompokan titik-titik pada graf berdasarkan warna yang disebut sebagai kelas-kelas warna dengan syarat setiap titik-titik pada graf tersebut memiliki kode warna yang berbeda. Penentuan bilangan kromatik lokasi suatu graf dilakukan dengan mengkonstruksi batas bawah dan batas atas bilangan kromatik lokasi dari suatu graf. Pada penelitian ini, akan dibahas mengenai bilangan kromatik lokasi Graf Tentakel yang dinotasikan dengan $T_{k,m,n}$. Graf Tentakel adalah graf yang dibangun dari graf buku segitiga Bt_n yang sisi bersamanya diamalgamasikan sisi dengan C_k. Kemudian dua titik di C_k yang bertetangga dengan titik yang terkait dengan sisi terminal, diamalgamasikan titik dengan graf bintang S_{n_1} dan S_{n_2}. Dengan menentukan batas bawah dan batas atas bilangan kromatik lokasi, diperoleh bahwa bilangan kromatik lokasi Graf Tentakel adalah 4, untuk $m = 1, n = 2, n + 1,$ untuk $m \geq 1, n \geq m + 2,$ dan $m + 2,$ untuk $m > 1, n < m + 2$.

Kata Kunci: Graf Tentakel, Bilangan Kromatik Lokasi, Kode Warna, Kelas Warna, Pewarnaan Lokasi

Abstract

The locating-chromatic number of a graph was introduced by Chartrand et al. in 2002, which is a combined concept between the vertex coloring and partition dimension of a graph. The locating-chromatic number of a graph is a grouping of vertices on a graph based on color, which is called a color class, provided that each vertex on the graph has a different color code. Determining the locating-chromatic number of a graph is done by constructing the lower and upper bound of the locating-chromatic number of the graph. In this paper, we determine the locating-chromatic number of the tentacle graph, which is denoted by $T_{k,m,n}$. Tentacle Graph is a graph constructed from a triangular book graph Bt_n whose common edge is amalgamated with C_k. Then two vertices in C_k that are adjacent to the vertex associated with the terminal edge are amalgamated with the star graphs S_{n_1} and S_{n_2}. By determining the lower and upper bounds of the location chromatic number, it is obtained that the location chromatic number of Tentacle Graph is 4, $m = 1, n = 2, n + 1, for\ m \geq 1, n \geq m + 2, and\ m + 2,\ for\ m > 1, n < m + 2$.

***Keywords**: Tentacle graph, locating-chromatic number, color code, color class, locating coloring*

1 Pendahuluan

Konsep bilangan kromatik lokasi pertama kali diperkenalkan oleh Chartrand dkk. [1] pada tahun 2002 yang merupakan pengembangan dua konsep, yaitu pewarnaan titik dan dimensi partisi dari suatu graf. Bilangan kromatik lokasi suatu graf merupakan pengelompokan titik-titik pada graf berdasarkan warna yang disebut sebagai kelas-kelas warna dengan syarat setiap titik-titik pada graf tersebut memiliki kode warna yang berbeda. Bilangan kromatik lokasi suatu graf didefinisikan oleh Chartrand dkk. [1] sebagai berikut. Misalkan c adalah suatu pewarnaan titik pada graf terhubung G. Definisikan $c: V(G) \rightarrow \{1,2, \dots, k\}$ dengan k merupakan bilangan bulat positif sedemikian sehingga $c(u) \neq c(v)$ untuk u dan v bertetangga di G. Misalkan S_i adalah himpunan titik yang diberi warna i untuk $i \in \{1,2, \dots, k\}$, yang selanjutnya disebut sebagai kelas warna. Misalkan $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ merupakan partisi terurut dari himpunan titik $V(G)$ berdasarkan suatu pewarnaan titik, representasi v terhadap Π disebut kode warna dari v dinotasikan dengan $c_\Pi\ (v)$ yang didefinisikan sebagai k-vektor,

$$c_\Pi\ (v) = \big(d(v, S_1), d(v, S_2), \dots, d(v, S_k)\big)$$

dimana $d(v, S_i\ ) = \min\{d(v, x) | x\ \in\ S_i\}$. Jika setiap titik yang berbeda di G mempunyai kode warna yang berbeda untuk suatu Π, maka c disebut sebagai pewarnaan lokasi. Nilai terkecil k sedemikian sehingga G mempunyai pewarnaan lokasi dengan k warna disebut sebagai bilangan kromatik lokasi yang dinotasikan sebagai χ_L.

Kajian mengenai bilangan kromatik lokasi suatu graf masih menarik untuk dieksplorasi hingga saat ini karena belum ditemukan teorema yang dapat digunakan untuk menentukan bilangan kromatik lokasi dari sebarang graf. Pada tahun 2002 Chartrand dkk. [1] telah memperoleh bilangan kromatik lokasi dari graf lingkaran. Pada tahun 2011, Behtoei dan Omoomi [2] menemukan bilangan kromatik lokasi dari graf hasil kali kartesian. Lalu, Asmiati dan Baskoro [3] pada tahun 2012 berhasil mengkarakterisasi semua graf yang memuat siklus dengan bilangan kromatik lokasi tiga. Baskoro dan Asmiati [4] juga telah mengkarakterisasi graf pohon berbilangan kromatik lokasi tiga. Asmiati dkk. juga memperoleh bilangan kromatik Lokasi untuk graf barbel tertentu [5]. Selanjutnya, pada tahun 2014, Welyyanti dkk. [6] memperluas definisi bilangan kromatik lokasi dari suatu graf yang dapat diimplementasikan untuk semua jenis graf, termasuk pada graf tak terhubung. Welyyanti dkk. [7] juga telah menemukan bilangan kromatik lokasi untuk graf dengan titik dominan pada tahun 2015. Pada penelitian ini akan ditentukan bilangan kromatik lokasi graf tentakel.

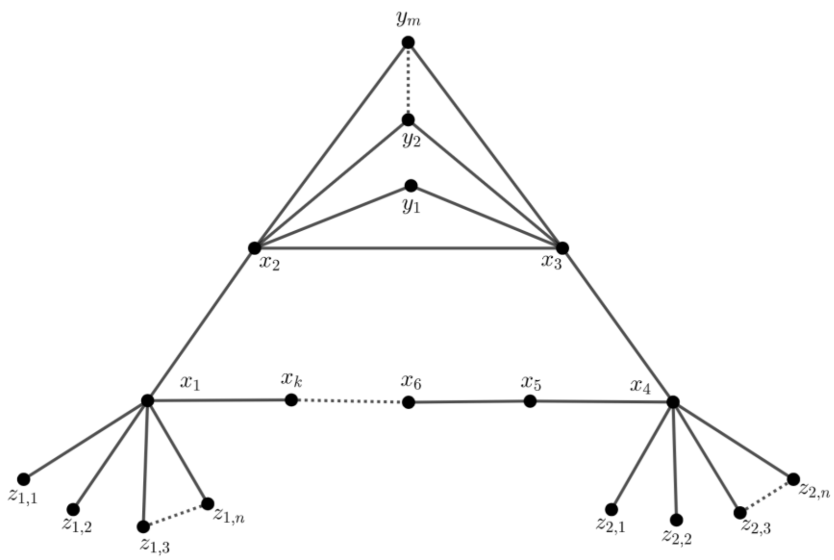
2 Landasan Teori

Graf siklus C_n merupakan graf terhubung yang mempunyai n titik dan setiap titiknya berderajat dua. Graf Bintang S_n merupakan suatu graf yang memiliki satu titik berderajat n yang disebut sebagai pusat dan titik lainnya berderajat satu. Graf buku segitiga yang dinotasikan sebagai Bt_n adalah suatu graf terhubung yang dibangun dari n buah graf lingkaran dengan tiga titik C_3 dan memiliki satu sisi bersama. Graf Tentakel yang dinotasikan sebagai $T_{k,m,n}$ merupakan graf yang dibangun dari graf buku segitiga Bt_n yang sisi bersamanya diamalgamasikan sisi dengan C_k. Kemudian dua titik di C_k yang bertetangga dengan titik yang terkait dengan sisi terminal, diamalgamasikan titik dengan graf bintang S_{n_1} dan S_{n_2}. Graf tentakel memiliki $k+m+n_1+n_2$ titik dan $k+2m+n_1+n_2$ sisi dengan himpunan titik dan himpunan sisi sebagai berikut.

$V(T_{k,m,n}) = \{x_h, y_i, z_{1,j}, z_{2,j} | 1 \leq h \leq k, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$,

$E(T_{k,m,n}) = \{x_h x_{h+1}, x_1 x_k | 1 \leq h \leq k\} \cup \{x_h y_i | 2 \leq h \leq 3, 1 \leq i \leq m\} \cup \{x_1 z_{1,j}, x_4 z_{2,j} | 1 \leq j \leq n\}$.

Graf Tentakel ditunjukkan pada Gambar 1.



Gambar 1. Graf Tentakel $T_{k,m,n}$

Berikut teorema dan akibat yang berkaitan dengan bilangan kromatik lokasi suatu graf diambil dari [1]. Definisikan $N(v)$ sebagai suatu himpunan yang beranggotakan semua titik yang bertetangga dengan v.

Teorema 1. Misalkan c adalah pewarnaan lokasi dari graf terhubung G. Jika u dan v merupakan dua titik yang berbeda di G sedemikian sehingga $d(u,w) = d(v,w)$ untuk setiap $w \in V(G) - \{u,v\}$, maka $c(u) \neq c(v)$. Secara khusus, jika u dan v merupakan titik-titik yang tidak bertetangga di G sedemikian sehingga $N(u) = N(v)$, maka $c(u) \neq c(v)$.

Akibat 2. Misalkan G adalah graf terhubung dengan satu titik yang bertetangga dengan k daun, maka $\chi_L(G) \geq k+1$.

3 Hasil dan Pembahasan

Pada Teorema 3 akan dibahas tentang bilangan kromatik lokasi untuk graf tentakel $T_{k,m,n}$ untuk $k, m, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ dengan $k \geq 4, n_1, n_2 \geq 2$ dan $n = maks\,\{n_1, n_2\}$.

Teorema 3. *Misalkan* $T_{k,m,n}$ *adalah graf tentakel untuk* $k, m, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ *dengan* $k \geq 4, n_1, n_2 \geq 2$ *dan* $n = maks\ \{n_1, n_2\}$, *maka*

$$\chi_L(T_{k,m,n}) = \begin{cases} 4, & \text{untuk } m = 1, n = 2, \\ n+1, & \text{untuk } m \geq 1, n \geq m+2, \\ m+2, & \text{untuk } m > 1, n < m+2. \end{cases}$$

Bukti. Misalkan $T_{k,m,n}$ adalah graf tentakel untuk $k, m, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ dengan $k \geq 4, n_1, n_2 \geq 2$ dan $n = maks\ \{n_1, n_2\}$. Untuk mencari bilangan kromatik lokasi $T_{k,m,n}$, perhatikan beberapa kasus berikut.

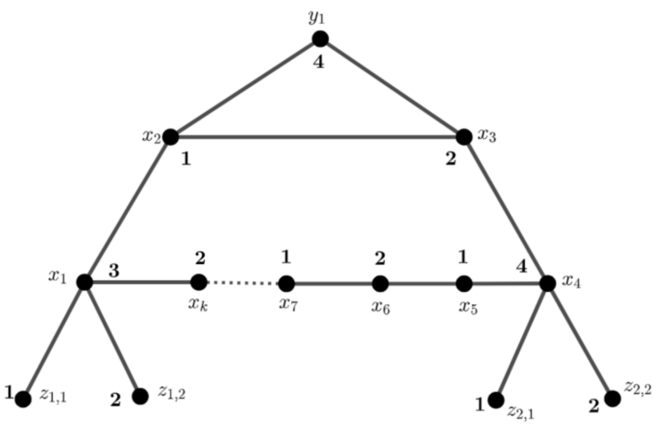
Kasus 1. Untuk $m = 1, n = 2$.

Misalkan $T_{k,1,2}$ memiliki 3-pewarnaan lokasi maka titik x_2, x_3, y_1 merupakan C_3 yang setiap titiknya adalah titik dominan. Graf $T_{k,1,2}$ memuat titik x_1 dan x_4 yang masing-masing bertetangga dengan dua daun, sehingga titik x_1 dan x_4 juga merupakan titik dominan. Ini berarti terdapat titik pada C_3 yang memiliki kode warna yang sama dengan titik x_1 dan x_4 dalam 3-pewarnaan lokasi $T_{k,1,2}$. Oleh karena itu, $\chi_L(T_{k,1,2}) \geq 4$.

Selanjutnya, akan ditentukan batas atas dari bilangan kromatik lokasi $T_{k,1,2}$. Definisikan pewarnaan titik $c: V(T_{k,1,2}) \rightarrow \{1,2,3,4\}$, sedemikian sehingga

$$c(v) = \begin{cases} 1, \text{untuk } v \in \{x_2, z_{1,1}, z_{2,1}\} \cup \{x_i | 5 \leq i \leq k, i \text{ bilangan ganjil}\}, \\ 2, \text{untuk } v \in \{x_3, z_{1,2}, z_{2,2}\} \cup \{x_i | 6 \leq i \leq k, i \text{ bilangan genap}\}, \\ 3, \text{untuk } v \in \{x_1\}, \text{dan} \\ 4, \text{untuk } v \in \{x_4, y_1\}. \end{cases}$$

Pada Gambar 2 diberikan suatu pewarnaan 4-lokasi terhadap graf $T_{k,1,2}$.



Gambar 2. Pewarnaan 4-lokasi untuk $T_{k,1,2}$

Kode warna dari titik-titik pada graf $T_{k,1,2}$ terhadap Π disajikan dalam beberapa subkasus sebagai berikut.

Subkasus 1.1 Untuk $k = 4$.

$c_\Pi(x_2) = (0,1,1,1)$, $c_\Pi(z_{2,1}) = (0,2,2,1)$, $c_\Pi(z_{2,2}) = (2,0,3,1)$, $c_\Pi(x_1) = (1,1,0,1)$,

$c_\Pi(z_{1,1}) = (0,2,1,2)$, $c_\Pi(x_3) = (1,0,2,1)$, $c_\Pi(x_4) = (1,1,1,0)$, $c_\Pi(y_1) = (1,1,2,0)$, $c_\Pi(z_{1,2}) = (2,01,2)$.

Subkasus 1.1 Untuk $k = 5$.

$c_\Pi(x_2) = (0,1,1,1)$, $c_\Pi(z_{2,1}) = (0,2,3,1)$, $c_\Pi(z_{2,2}) = (2,0,3,1)$, $c_\Pi(x_1) = (1,1,0,2)$, $c_\Pi(x_5) = (0,2,1,1)$, $c_\Pi(x_3) = (1,0,2,1)$, $c_\Pi(x_4) = (1,1,1,0)$, $c_\Pi(y_1) = (1,1,2,0)$, $c_\Pi(z_{1,1}) = (0,2,1,3)$, $c_\Pi(z_{1,2}) = (2,01,3)$.

Subkasus 1.1 Untuk $k \geq 6$.

$c_\Pi(x_2) = (0,1,1,1)$, $c_\Pi(z_{2,1}) = (0,2,4,1)$, $c_\Pi(z_{2,2}) = (2,0,4,1)$, $c_\Pi(x_1) = (1,1,0,2)$, $c_\Pi(z_{1,1}) = (0,2,1,3)$, $c_\Pi(x_3) = (1,0,2,1)$, $c_\Pi(x_4) = (1,1,3,0)$, $c_\Pi(y_1) = (1,1,2,0)$, $c_\Pi(z_{1,2}) = (2,01,3)$.

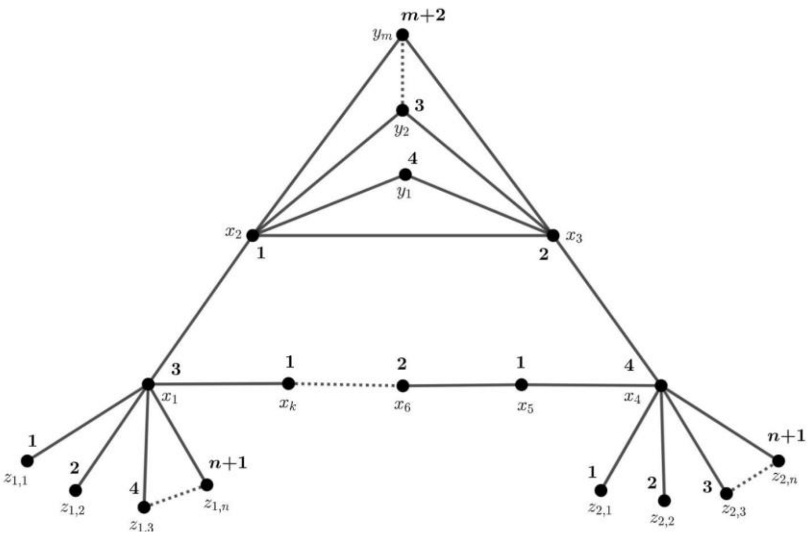
Kemudian, setiap kode warna dari titik-titik x_i untuk $i \in \{5,6, \dots k\}$ dengan warna 1 atau warna 2 pada $T_{k,1,2}$ dibedakan oleh jarak ke titik-titik yang berada di kelas warna 3 dan kelas warna 4. Berdasarkan hasil yang diperoleh, dapat dilihat bahwa setiap titik memiliki kode warna yang berbeda. Jadi $\chi_L(T_{k,1,2}) \leq 4$. Dengan demikian, karena diperoleh $\chi_L(T_{k,1,2}) \geq 4$ dan $\chi_L(T_{k,1,2}) \leq 4$ maka $\chi_L(T_{k,1,2}) = 4$.

Kasus 2. Untuk $m \geq 1, n \geq m + 2$.

Graf $T_{k,m,n}$ memuat titik yang bertetangga dengan n daun, maka berdasarkan Akibat 1, diperoleh bahwa maka $\chi_L(T_{k,m,n}) = n + 1$. Selanjutnya, definisikan pewarnaan titik $c: V(T_{k,m,n}) \rightarrow \{1,2, \dots, n, n + 1\}$, sedemikian sehingga

$$c(v) = \begin{cases} 1, \text{untuk } v \in \{x_2, z_{1,1}, z_{2,1}\} \cup \{x_h | 5 \leq h \leq k, h \text{ bilangan ganjil}\}, \\ 2, \text{untuk } v \in \{x_3, z_{1,2}, z_{2,2}\} \cup \{x_h | 6 \leq h \leq k, h \text{ bilangan genap}\}, \\ 3, \text{untuk } v \in \{x_1, y_2, z_{2,3}\}, \\ 4, \text{untuk } v \in \{x_4, y_1, z_{1,3}\}, \\ 5, \text{untuk } v \in \{y_3, z_{1,4}, z_{2,4}\}, \\ 6, \text{untuk } v \in \{y_4, z_{1,5}, z_{2,5}\}, \\ i + 2, \text{untuk } v \in \{y_i | 5 \leq i \leq m, \text{dan} \\ j + 1, \text{untuk } v \in \{z_{1,j}, z\_(2,j)\} | 1 \leq j \leq n. \end{cases}$$

Pada Gambar 3 diberikan suatu pewarnaan lokasi terhadap graf $T_{k,m,n}$.



Gambar 3. Pewarnaan lokasi $T_{k,m,n}$.

Kode warna dari titik-titik pada graf $T_{k,m,n}$ terhadap Π disajikan dalam tabel sebagai berikut.

Tabel 1. Kode Warna Titik Graf $T_{k,m,n}$

Kode Warna	Kode Warna
$c_\Pi(x_1) = (1,1,0,\underbrace{1,1,\dots,1}_{n-2}),$	$c_\Pi(z_{1,1}) = (0,2,1,\underbrace{2,2,\dots,2}_{n-2}),$
$c_\Pi(x_2) = (1,0,\underbrace{1,1,\dots,1}_{m+2},\underbrace{2,2,\dots,2}_{n+1-m}),$	$c_\Pi(z_{1,2}) = (2,0,1,\underbrace{2,2,\dots,2}_{n-2}),$
$c_\Pi(x_3) = (1,0,\underbrace{1,1,\dots,1}_{m},\underbrace{2,2,\dots,2}_{n+1-m}),$	$c_\Pi(z_{1,3}) = (2,2,1,0,\underbrace{2,2,\dots,2}_{n-3}),$
$c_\Pi(x_4) = (1,1,1,0,\underbrace{1,1,\dots,1}_{n-3}),$	$c_\Pi(z_{1,i}) = (2,2,1,\underbrace{2,2,\dots,2}_{i-3},0,\underbrace{2,2,\dots,2}_{n-i}),$
$c_\Pi(y_1) = (1,1,2,0,\underbrace{2,2,\dots,2}_{m-2},\underbrace{3,3,\dots,3}_{n+1-m}),$	$c_\Pi(z_{1,n}) = (2,2,1,\underbrace{2,2,\dots,2}_{n-3},0),$
$c_\Pi(y_2) = (1,1,0,\underbrace{2,2,\dots,2}_{m-1},\underbrace{3,3,\dots,3}_{n+1-m}),$	$c_\Pi(z_{2,1}) = (0,2,2,1,\underbrace{2,2,\dots,2}_{n-3}),$
$c_\Pi(y_3) = (1,1,2,2,0,\underbrace{2,2,\dots,2}_{m-3},\underbrace{3,3,\dots,3}_{n+1-m}),$	$c_\Pi(z_{2,2}) = (2,0,2,1,\underbrace{2,2,\dots,2}_{n-3}),$
$c_\Pi(y_i) =$ $(1,1,\underbrace{2,2,\dots,2}_{i-1},0,\underbrace{2,2,\dots,2}_{m-i},\underbrace{3,3,\dots,3}_{n+1-m}),$	$c_\Pi(z_{2,3}) = (2,2,0,1,\underbrace{2,2,\dots,2}_{n-3}),$
$c_\Pi(y_{m-1}) = (1,1,\underbrace{2,2,\dots,2}_{m-2},0,2,\underbrace{3,3,\dots,3}_{n+1-m}),$	$c_\Pi(z_{2,i}) = (2,2,2,1,\underbrace{2,2,\dots,2}_{i-4},0,\underbrace{2,2,\dots,2}_{n-i}),$
$c_\Pi(y_m) = (1,1,\underbrace{2,2,\dots,2}_{m-1},0,\underbrace{3,3,\dots,3}_{n+1-m}),$	$c_\Pi(z_{2,n}) = (2,2,2,1,\underbrace{2,2,\dots,2}_{n-3},0).$

Kemudian, setiap kode warna dari titik-titik x_i untuk $i \in \{5,6,\dots k\}$ dengan warna 1 atau warna 2 pada $T_{k,1,2}$ dibedakan oleh jarak ke titik-titik yang berada di kelas warna 3 dan kelas warna 4. Berdasarkan hasil yang diperoleh, dapat dilihat bahwa setiap titik memiliki kode warna yang berbeda. Jadi $\chi_L(T_{k,m,n}) \leq n+1$. Dengan demikian, karena diperoleh $\chi_L(T_{k,m,n}) \geq n+1$ dan $\chi_L(T_{k,m,n}) \leq n+1$ maka $\chi_L(T_{k,m,n}) = n+1$.

Kasus 3. Untuk $m > 1, n < m+2$.

Misalkan diberikan $m+1$-pewarnaan lokasi. Subgraf Bt_m memuat $m+2$ titik, maka akan terdapat dua titik dengan kode warna yang sama pada subgraf tersebut, yaitu dua titik y_i. Akibatnya, maka $\chi_L(T_{k,m,n}) \geq m+2$. Selanjutnya, definisikan pewarnaan titik $c: V(T_{k,m,n}) \rightarrow \{1,2,\dots,m,m+1,m+2\}$, sedemikian sehingga

$$c(v) = \begin{cases} 1, \text{untuk } v \in \{x_2, z_{1,1}, z_{2,1}\} \cup \{x_h | 5 \leq h \leq k, h \text{ bilangan ganjil}\}, \\ 2, \text{untuk } v \in \{x_3, z_{1,2}, z_{2,2}\} \cup \{x_h | 6 \leq h \leq k, h \text{ bilangan genap}\}, \\ 3, \text{untuk } v \in \{x_1, y_2, z_{2,3}\}, \\ 4, \text{untuk } v \in \{x_4, y_1, z_{1,3}\}, \\ 5, \text{untuk } v \in \{y_3, z_{1,4}, z_{2,4}\}, \\ 6, \text{untuk } v \in \{y_4, z_{1,5}, z_{2,5}\}, \\ i+2, \text{untuk } v \in \{y_i | 5 \leq i \leq m, \text{dan} \\ j+1, \text{untuk } v \in \{z_{1,j}, z\_(2,j) | 1 \leq j \leq n. \end{cases}$$

Pada Gambar 3 diberikan suatu pewarnaan lokasi terhadap graf $T_{k,m,n}$. Kode warna dari titik-titik pada graf $T_{k,m,n}$ terhadap Π disajikan dalam tabel sebagai berikut.

Tabel 2. Kode Warna Titik Graf $T_{k,m,n}$

Kode Warna	Kode Warna
$c_\Pi(x_1) = (1,1,0,\underbrace{1,1,\dots,1}_{n-2},\underbrace{2,2,\dots,2}_{m-n+1})$,	$c_\Pi(z_{1,1}) = (0,2,1,\underbrace{2,2,\dots,2}_{n-2},\underbrace{3,3,\dots,3}_{m-n+1})$,
$c_\Pi(x_2) = (0,\underbrace{1,1,\dots,1}_{m+1})$,	$c_\Pi(z_{1,2}) = (2,0,1,\underbrace{2,2,\dots,2}_{n-2},\underbrace{3,3,\dots,3}_{m-n+1})$,
$c_\Pi(x_3) = (1,0,\underbrace{1,1,\dots,1}_{m})$,	$c_\Pi(z_{1,3}) = (2,2,1,0,\underbrace{2,2,\dots,2}_{n-3},\underbrace{3,3,\dots,3}_{m-n+1})$,
$c_\Pi(x_4) = (1,1,1,0,\underbrace{1,1,\dots,1}_{n-3},\underbrace{2,2,\dots,2}_{m-n+1})$,	$c_\Pi(z_{1,i}) = (2,2,1,\underbrace{2,2,\dots,2}_{i-3},0,\underbrace{2,2,\dots,2}_{n-i})$,
$c_\Pi(y_1) = (1,1,2,0,\underbrace{2,2,\dots,2}_{m-2})$,	$c_\Pi(z_{1,n}) = (2,2,1,\underbrace{2,2,\dots,2}_{n-3},0,\underbrace{3,3,\dots,3}_{m-n+1})$,
$c_\Pi(y_2) = (1,1,0,\underbrace{2,2,\dots,2}_{m-1})$,	$c_\Pi(z_{2,1}) = (0,2,2,1,\underbrace{2,2,\dots,2}_{n-3},\underbrace{3,3,\dots,3}_{m-n+1})$,
$c_\Pi(y_3) = (1,1,2,2,0,\underbrace{2,2,\dots,2}_{m-3})$,	$c_\Pi(z_{2,2}) = (2,0,2,1,\underbrace{2,2,\dots,2}_{n-3},\underbrace{3,3,\dots,3}_{m-n+1})$,
$c_\Pi(y_i) = (1,1,\underbrace{2,2,\dots,2}_{i-1},0,\underbrace{2,2,\dots,2}_{m+2})$,	$c_\Pi(z_{2,3}) = (2,2,0,1,\underbrace{2,2,\dots,2}_{n-3},\underbrace{3,3,\dots,3}_{m-n+1})$,
$c_\Pi(y_{m-1}) = (1,1,\underbrace{2,2,\dots,2}_{m-2},0,2)$,	$c_\Pi(z_{2,i}) = (2,2,2,1,\underbrace{2,2,\dots,2}_{i-4},0,,\underbrace{2,2,\dots,2}_{n-i})$,
$c_\Pi(y_m) = (1,1,\underbrace{2,2,\dots,2}_{m-1},0)$,	$c_\Pi(z_{2,n}) = (2,2,2,1,\underbrace{2,2,\dots,2}_{n-4},0,\underbrace{3,3,\dots,3}_{m-n+1})$.

Kemudian, setiap kode warna dari titik-titik x_i untuk $i \in \{5,6, ... k\}$ dengan warna 1 atau warna 2 pada $T_{k,1,2}$ dibedakan oleh jarak ke titik-titik yang berada di kelas warna 3 dan kelas warna 4. Berdasarkan hasil yang diperoleh, dapat dilihat bahwa setiap titik memiliki kode warna yang berbeda. Jadi $\chi_L(T_{k,m,n}) \leq m+2$. Dengan demikian, karena diperoleh $\chi_L(T_{k,m,n}) \geq m+2$ dan $\chi_L(T_{k,m,n}) \leq n+1$ maka $\chi_L(T_{k,m,n}) = m+2$.

4 Simpulan

Pada penelitian ini diperoleh bilangan kromatik lokasi graf tentakel yang dinotasikan dengan $T_{k,m,n}$ untuk $k, m, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ dengan $k \geq 4, n_1, n_2 \geq 2$ dan $n = maks\ \{n_1, n_2\}$, yaitu

$$\chi_L(T_{k,m,n}) \begin{cases} 4, & \text{untuk } m = 1, n = 2, \\ n+1, & \text{untuk } m \geq 1, n \geq m+2, \\ m+2, & \text{untuk } m > 1, n < m+2. \end{cases}$$

Penelitian ini dapat dikembangkan lagi pada kasus yang lebih luas, salah satunya yaitu dengan menambahkan graf bintang yang serupa dengan subgraf S_{n_1} dan S_{n_2} untuk semua titik yang berada pada lintasan diantara subgraf S_{n_1} dan S_{n_2}.

5 Ucapan Terima Kasih

Penelitian ini dibiayai oleh Direktorat Riset, Teknologi, dan Pengabdian kepada Masyarakat, Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi, Riset, dan Teknologi, Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi pada skema Penelitian Disertasi Doktor sesuai dengan kontrak penelitian Nomor : 041/E5/PG.02.00.PL/2024 tahun anggaran 2024.

6 Daftar Pustaka

[1] P. Z. Gary Chartrand, David Erwin, Michael A. Henning, Peter J. Slater, “The Locating-Chromatic Number of a Graph,” *Bull. ICA*, vol. 36, pp. 89–101, 2002.

[2] A. Behtoei and B. Omoomi, “On the locating chromatic number of the cartesian product of graphs,” *Ars Comb.*, vol. 126, pp. 221–235, 2016.

[3] Asmiati and E. T. Baskoro, “Characterizing all graphs containing cycles with locating-chromatic number 3,” *AIP Conf. Proc.*, vol. 1450, no. 3, pp. 351–357, 2012, doi: 10.1063/1.4724167.

[4] E. T. Baskoro and A. Asmiati, “Characterizing all trees with locating-chromatic number 3,” *Electron. J. Graph Theory Appl.*, vol. 1, no. 2, pp. 109–117, 2013, doi: 10.5614/ejgta.2013.1.2.4.

[5] Asmiati, I. K. Sadha Gunce Yana, and L. Yulianti, “On the Locating Chromatic Number

of Certain Barbell Graphs," *Int. J. Math. Math. Sci.*, vol. 2018, pp. 1–6, 2018, doi: 10.1155/2018/5327504.

[6] D. Welyyanti, E. T. Baskoro, R. Simanjuntak, and S. Uttunggadewa, "The locating-chromatic number of disconnected graphs," *Far East J. Math. Sci.*, vol. 94, no. 2, pp. 169–182, 2014.

[7] D. Welyyanti, E. T. Baskoro, R. Simanjuntak, and S. Uttunggadewa, "On Locating-chromatic Number for Graphs with Dominant Vertices," *Procedia Comput. Sci.*, vol. 74, pp. 89–92, 2015, doi: 10.1016/j.procs.2015.12.081.