

Penjadwalan Kereta Bandara dan Commuter Line Yogyakarta Menggunakan Aljabar Max-Plus

Nindya Yan Pramesti¹, Angela Merici Olivia Putri², Marcellinus Andy Rudhito^{3*}

^{1,2,3}Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta, Indonesia

e-mail:rudhito@usd.ac.id

Diajukan: 29 Juli 2024, Diperbaiki: 15 Januari 2025, Diterima: 2 Juni 2025

Abstrak

Kereta api merupakan transportasi umum yang memiliki peranan penting dalam mobilitas masyarakat. Masyarakat Solo dan Yogyakarta telah merasakan secara langsung efektivitas dari kereta sebagai moda transportasi yang memudahkan masyarakat untuk bepergian antar kota dengan menggunakan kereta komuter dan kereta bandara. Akan tetapi, penjadwalan kereta bandara YIA, kereta bandara Adi-Soemarmo, dan *Commuter Line* Yogyakarta belum tersinkronisasi karena hanya dibuat berdasarkan kebutuhan penumpang. Proses sinkronisasi jadwal kepergian antar ketiga jenis kereta digunakan untuk memastikan ketersediaan kereta pada saat penumpang ingin beralih dari satu kereta dengan rute tertentu menuju kereta lain yang memiliki rute berbeda. Tujuan dari penelitian ini berupa menyusun suatu model jaringan kepergian *Commuter Line* Yogyakarta, kereta bandara Yogyakarta International Airport (YIA), dan kereta bandara Adi-Soemarmo untuk dianalisis penjadwalan memanfaatkan aljabar max-plus, diakhiri dengan menentukan nilai eigen beserta vektor eigen. Metode yang digunakan dalam penelitian ini berupa analisis literatur menggunakan *Software Scilab*. Hasil penelitian diperoleh suatu nilai eigen yaitu $\lambda(A) = 136$ dan vektor eigen berupa bilangan real berukuran 16×1 . Dari nilai eigen disusun suatu penjadwalan kereta yang tersinkronisasi dengan periode kepergian, yaitu setiap 2 jam 16 menit sekali atau setiap 136 menit sekali.

Kata Kunci: Aljabar Max-plus, Penjadwalan, Kereta Api

Abstract

Trains serve as a crucial mode of public transportation, significantly impacting people's mobility. Residents of Solo and Yogyakarta have experienced firsthand the benefits of trains for traveling between cities, whether using commuter or airport trains. However, the schedules for the YIA airport train, Adi-Soemarmo airport train, and Yogyakarta Commuter Line are not currently coordinated, as they are planned based solely on passenger demand. Synchronizing the departure times of these three train types is essential to ensure that trains are available when passengers need to transfer between different routes. This study aims to develop a network model for the departure schedules of the Yogyakarta Commuter Line, Yogyakarta International Airport (YIA) airport train, and Adi-Soemarmo airport train. It uses max-plus algebra to analyze the scheduling, culminating in the determination of eigenvalues and eigenvectors. The research employs literature review and *Software Scilab*. The findings revealed a maximum eigenvalue of $\lambda(A) = 136$ and an eigenvector in the form of a 16×1 real number matrix. Based on this maximum eigenvalue, a synchronized train schedule was created, with departures every 2 hours and 16 minutes, or 136 minutes.

Keywords: Aljabar Max-Plus, Scheduling, Train

1 Pendahuluan

Hingga saat ini, sudah ada berbagai jenis transportasi umum baik transportasi umum udara, darat maupun laut seperti mobil, motor, bus, pesawat, kereta, kapal, MRT, dan LRT [1]. Transportasi umum menjadi salah satu poin permasalahan yang sering dihadapi oleh masyarakat di seluruh kota khususnya kota-kota yang maju maupun berkembang [2]. Padahal transportasi umum memiliki peranan penting dalam menunjang mobilitas masyarakat [3].

Pemerintah kota Yogyakarta bekerjasama dengan Kementrian Perhubungan dalam meningkatkan moda transportasi darat, khususnya kereta yang terdapat di kota Yogyakarta. Pada awalnya rute perjalanan Solo-Yogyakarta dilayani oleh Kereta Prambanan Ekspres (Prameks) akan tetapi saat ini digantikan dengan *Commuter Line* Solo-Yogyakarta. Pergantian kereta ini diharapkan mampu meningkatkan layanan transportasi kepada masyarakat sebab perbandingan antara jumlah penumpang dengan *seat* kereta Prameks terus meningkat [4].

Pemerintah kota Yogyakarta turut melakukan upaya lain dalam meningkatkan moda transportasi udara di Yogyakarta yaitu pemindahan bandara kota Yogyakarta yang pada awalnya berada di Adisutjipto International Airport dipindahkan ke Yogyakarta International Airport membuat mobilitas yang biasanya dilakukan oleh masyarakat umum turut berubah [5]. Bandara YIA yang berada jauh dari kota Yogyakarta memerlukan adanya suatu moda transportasi baru, dalam hal ini pemerintah pembangunan layanan transportasi darat yaitu kereta Bandara yang akan melayani perjalanan dengan rute Stasiun Yogyakarta - Stasiun Wates - Stasiun Bandara YIA [6]. Adanya moda kereta Bandara YIA diharapkan jarak dan waktu tempuh menuju Bandara YIA lebih cepat dibandingkan dengan menggunakan transportasi umum lainnya yang membutuhkan waktu lebih lama dikarenakan terkena kemacetan [7].

Pembangunan transportasi kereta bandara rupanya tidak hanya berada di Bandara YIA saja, melainkan bandara Adi-Soemarmo turut terdapat pembangunan kereta bandara Adi-Soemarmo. Kereta Bandara Adi Soemarmo akan melayani perjalanan dengan rute Stasiun Klaten - Stasiun Purwosari - Stasiun Solo Balapan - Stasiun Kadipiro - Stasiun Adi Soemarmo. Keberadaan kereta bandara Adi-Soemarmo diharapkan mempermudah mobilitas masyarakat dan membuat waktu tempuh perjalanan lebih efisien [5].

Berdasarkan penjelasan inovasi terbaru dari transportasi yang berada di Yogyakarta dan Solo, peneliti menemukan bahwa pembuatan jadwal kepergian kereta *Commuter Line* dan kereta bandara YIA dan kereta bandara Adi-Soemarmo dibuat menyesuaikan kebutuhan penumpang, sehingga proses sinkronisasi belum terjadi [8]. Sementara itu, dalam jaringan transportasi sinkronisasi sangat penting dilakukan untuk memastikan bahwa sarana transportasi tersedia ketika konsumen ingin berpindah rute [8]. Proses sinkronisasi diperlukan agar ketersediaan *Commuter*

Line Yogyakarta, Kereta Bandara YIA dan Kereta Bandara Adi-Soemarmo dapat menjamin terjadinya perpindahan dari *Commuter Line* dengan rute yang berbeda menuju ke kereta bandara dengan rute lainnya [9].

Perlu diperhatikan bahwa penelitian ini dilakukan dengan asumsi bahwa sistem transportasi yang dikonstruksi murni didasarkan pada sinkronisasi menggunakan aljabar max-plus. Asumsi ini diambil untuk menyederhanakan model penjadwalan transportasi dengan fokus utama pada sinkronisasi. Asumsi ini diambil untuk menyederhanakan model penjadwalan kereta dengan fokus utama pada sinkronisasi antar jadwal kereta, sehingga memungkinkan pemodelan yang lebih terstruktur dan matematis. Namun, dalam prakteknya, penjadwalan kereta melibatkan berbagai faktor lain yang mempengaruhi operasional, seperti keterbatasan sumber daya manusia dan material, regulasi, serta fluktuasi permintaan pasar. Selain itu, faktor operasional seperti ketersediaan armada, waktu istirahat kru, dan peraturan keselamatan, serta pertimbangan eksternal seperti cuaca dan kemacetan, juga mempengaruhi efektivitas penjadwalan. Oleh karena itu, meskipun model ini memberikan gambaran ideal tentang sinkronisasi jadwal kereta, perlu diingat bahwa dalam aplikasi praktis, berbagai faktor tambahan tersebut akan mempengaruhi keberhasilan implementasi sistem yang disarankan.

Penelitian ini relevan dengan beberapa penelitian sebelumnya terkait Aljabar Max-Plus, seperti dalam [3] yang membahas penjadwalan kereta di Daop 8 Surabaya untuk meminimalisir terjadinya keterlambatan yang biasanya terjadi sehingga mengganggu mobilitas penumpang kereta. Dari hasil penelitian yang dilakukan oleh [3] ini memperoleh periode kepergian masing-masing stasiun 101 menit sekali. Penelitian lainnya dalam [10] membahas analisis beserta model jaringan kereta yang berada di Jawa Timur memanfaatkan aljabar max-plus dan petri net. Dari hasil penelitian yang dilakukan oleh [10] diperoleh model serta desain jadwal kepergian kereta di Jawa Timur yang realistik dengan periode kepergian setiap λ menit, dengan $93,625 \leq \lambda \leq 101,25$.

Terdapat juga penelitian [11] yang berisikan rancangan desain jadwal pada kepergian *Commuter Line* dengan memperhatikan proses sinkronisasi. Dari hasil penelitian yang dilakukan oleh [11] diperoleh jaringan *Commuter Line* Jabodetabek dapat dimodelkan dengan menggunakan aljabar max-plus dengan nilai eigen yaitu $\lambda(A) = 32$ serta vektor eigen yang terdiri atas bilangan real, sehingga memungkinkan penjadwalan kereta tersinkronisasi. Nilai eigen merepresentasikan jangka waktu pemberangkatan KRL dari setiap stasiun yaitu 32 menit sekali. Selain itu, terdapat penelitian [8] yang membahas desain penjadwalan untuk kepergian kereta komuter di DAOP VI Yogyakarta dengan memperhatikan sinkronisasi menggunakan aljabar max-plus.

Berdasarkan ketiga artikel yang relevan tersebut dapat diketahui bahwa dalam memodelkan jaringan kereta untuk menentukan penjadwalan kepergian dapat menggunakan bantuan aljabar max-plus. Namun masih ditemukan beberapa saran yang dapat digunakan untuk membantu penelitian selanjutnya berupa matriks hasil pemodelan adalah matriks yang tidak *irreducible* (tereduksi) serta memiliki vektor eigen yang berupa bilangan real serta belum memperhatikan stasiun-stasiun pemberhentian kecil. Oleh karena itu, berdasarkan saran dan masukan dari penelitian sebelumnya peneliti memilih untuk menentukan jaringan kepergian kereta *Commuter Line*, kereta bandara *Yogyakarta International Airport* (YIA), dan kereta bandara Adi-Soemarmo untuk dianalisis penjadwalannya menggunakan aljabar max-plus yang selanjutnya akan ditentukan nilai eigen beserta vektor eigen dengan memperhatikan proses sinkronisasi.

2 Metode Penelitian

Penelitian yang diterapkan oleh peneliti adalah jenis penelitian kuantitatif. Dalam hal ini, penelitian kuantitatif merupakan penelitian dengan data numerik untuk mengumpulkan informasi, menganalisis fenomena, serta mencapai pemahaman yang lebih mendalam tentang objek penelitian. Hal ini sejalan dengan pemikiran Babbie (2016) menyatakan bahwa penelitian kuantitatif merupakan proses ilmiah yang melibatkan pengumpulan data berbasis numerik dan analisis statistik guna menguji hipotesis serta memberikan jawaban terhadap pertanyaan penelitian yang diajukan [12]. Cresswell (2014) menyatakan bahwa penelitian ini digunakan untuk menguji teori dengan kebutuhan akan pengukuran dan analisis statistik terhadap data yang diperoleh guna menemukan solusi atas pertanyaan penelitian [13].

Metode penelitian yang diterapkan melibatkan studi pustaka, yang didukung oleh data lapangan serta analisis komputasi menggunakan *Software Scilab*.

Langkah-langkah yang diambil dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengumpulkan literatur dari berbagai sumber seperti buku, artikel, dan tesis untuk mengembangkan model mengenai jaringan kereta komuter dan kereta bandara. Selanjutnya, melakukan analisis terhadap penjadwalan dengan menggunakan aljabar max-plus, memperhatikan kondisi nyata dari jadwal kepergian kereta komuter Yogya, Kereta bandara YIA, dan kereta bandara Adi Soemarmo.
2. Mengumpulkan informasi terkait dengan kereta komuter Yogyakarta, kereta bandara YIA, dan kereta bandara Adi Soemarmo menggunakan instrumen penelitian berupa dokumen. Dokumen tersebut mencakup peta rute, jadwal kepergian, dan jalur yang dilalui oleh kereta tersebut.

3. Menentukan jalur yang diinginkan dan menggambarkan graf dari jalur tersebut.
4. Menyusun peraturan untuk menyelaraskan graf jalur tersebut.
5. Menyusun model matematika mengikuti aturan penyelarasan yang telah ditetapkan.
6. Menetapkan matriks A yang didasarkan pada model matematika yang diperoleh.
7. Menghitung nilai dan vektor eigen dari matriks A
8. Merancang jadwal perjalanan yang terhubung untuk *Commuter Line* Yogyakarta, kereta bandara YIA, dan kereta bandara Adi Soemarmo.
9. Menganalisis kecocokan antara jadwal perjalanan yang dihasilkan dengan situasi sebenarnya.
10. Menyandingkan temuan penelitian dengan penelitian serupa yang telah ada.

3 Landasan Teori

3.1 Aljabar Max-Plus

Definisi 1 [14] Diberikan himpunan tak kosong $\mathbb{R}_\varepsilon = \mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$, dimana \mathbb{R} adalah bilangan riil, $\varepsilon = -\infty$, dan didefinisikan dua operasi biner:

(1) Operasi (\oplus) , dimana untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}_\varepsilon$, berlaku:

$$a \oplus b = \max(a, b)$$

(2) Operasi (\otimes) , dimana untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}_\varepsilon$, berlaku:

$$a \otimes b = a + b$$

3.2 Matriks Pada Aljabar Max-Plus

Definisi 2 [15] Sebuah matriks didefinisikan menjadi suatu susunan nilai berbentuk persegi yang disusun dalam bentuk baris dan kolom. Suatu matriks ditulis sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matriks $R_{max}^{n \times m}$ didefinisikan sebagai matriks berukuran $n \times m$ dengan operasi \otimes dan \oplus . Beberapa operasi terkait matriks pada aljabar max-plus memiliki definisi sebagai berikut.

Definisi 3 [14] Penjumlahan matriks $A, B \in R_{max}^{n \times m}$, didefinisikan dengan

$$[A \oplus B]_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij} = \max(a_{ij}, b_{ij})$$

Definisi 4 [14] Perkalian matriks $A, B \in R_{max}^{n \times m}$ dengan skalar $a \in R_{max}$ didefinisikan oleh

$$[a \otimes A]_{ij} = a \otimes a_{ij}$$

3.3 Representasi Graf pada Aljabar Max-Plus

Definisi 5[14] Diberikan $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Graf berbobot dari A adalah graf berbobot $G(A) = (V, A)$ dengan $V = \{1, 2, \dots, N\}$ dan $A = \{(j, i) | w(i, j) = A_{ij} \neq \varepsilon\}$.

Definisi 6[14] Suatu matriks $A \in R_{max}^{n \times m}$ dikatakan irreduksibel jika graf berbobot yang bersesuaian dengan A terhubung kuat.

4 Hasil dan Pembahasan

4.1 Sistem Transportasi Kereta Bandara Yogyakarta International Airport, Commuter Line Yogyakarta, dan Kereta Bandara Adi-Soemarmo

Berikut merupakan tiga rute yang dilalui oleh masing-masing Kereta Bandara YIA, Kereta Komuter Yogyakarta Line, dan Kereta Bandara Adi-Soemarmo. Data ini diperoleh dari aplikasi “Access by KAI” yang merupakan aplikasi resmi PT Kereta Indonesia (penulisan Stasiun disingkat menjadi St.).

1. Rute 1 (Kereta Bandara Yogyakarta International Airport)

St. Yogya International Airport - St. Wates - St. Tugu Yogya - St. Wates - St. Yogya International Airport.

2. Rute 2 (Kereta Bandara Express Yogyakarta International Airport)

St. Yogya International Airport - St. Tugu Yogya - St. Yogya International Airport.

3. Rute 3 (Kereta Komuter Yogyakarta Line)

St. Tugu Yogya - St. Lempuyangan - St. Maguwo - St. Brambanan - St. Srowot - St. Klaten - St. Ceper - St. Delanggu - St. Gawok - St. Purwosari - St. Solo Balapan - St. Solo Jebres - St. Palur - St. Solo Jebres - St. Solo Balapan - St. Purwosari - St. Gawok - St. Delanggu - St. Ceper - St. Klaten - St. Srowot - St. Brambanan - St. Maguwo - St. Lempuyangan - St. Tugu Yogya.

4. Rute 4 (Kereta Bandara Adi-Soemarmo)

St. Adi-Soemarmo - St. Kadipiro - St. Solo Balapan - St. Purwosari - St. Klaten - St. Purwosari - St. Solo Balapan - St. Kadipiro - St. Adi-Soemarmo.

4.2 Rute Pilihan

Pemilihan rute dilakukan dengan menetapkan stasiun besar yang memungkinkan untuk penumpang melakukan pergantian dari satu kereta ke kereta lain yang biasa disebut stasiun transfer. Stasiun-stasiun transfer ini berupa stasiun Bandara Yogyakarta International Airport, Stasiun Tugu Yogyakarta, Stasiun Klaten, Stasiun Solo Balapan, Stasiun Palur, dan Stasiun

Bandara Adi-Soemarmo. Pemilihan rute ini menggunakan semua rute Kereta Bandara Yogyakarta International Airport, Kereta Bandara Adi-Soemarmo, *Commuter Line* Yogyakarta yang beroperasi pada *weekend* maupun *weekdays* selama 24 jam.

Pada setiap rute kereta memiliki penjelasan sebagai berikut, untuk rute Kereta Bandara Yogyakarta International Airport memiliki rute dari Stasiun Tugu Yogyakarta menuju Stasiun Bandara Yogyakarta International Airport dan arah sebaliknya yaitu dari Stasiun Bandara Yogyakarta International Airport menuju Stasiun Tugu Yogyakarta, rute *Commuter Line Yogyakarta* memiliki rute dari Stasiun Tugu Yogyakarta menuju ke Stasiun Klaten, Stasiun Solo Balapan berakhir di Stasiun Palur dan arah sebaliknya yaitu dari Stasiun Palur menuju Stasiun Solo Balapan, Stasiun Klaten berakhir di Stasiun Tugu Yogyakarta, rute Kereta Bandara Adi-Soemarmo memiliki rute dari Stasiun Klaten menuju ke Stasiun Solo Balapan berakhir di Stasiun Bandara Adi-Soemarmo dan arah sebaliknya yaitu dari Stasiun Bandara Adi-Soemarmo menuju ke Stasiun Solo Balapan berakhir di Stasiun Klaten.

4.3 Graf Rute Pilihan

Pada bagian ini akan disusun sebuah graf berarah berbobot. Dalam proses pembuatan graf rute pilihan akan digunakan beberapa simbol untuk merepresentasikan stasiun transfer yang telah dipilih, sebagai berikut (penulisan Stasiun disingkat menjadi St.):

A = St. Bandara YIA

1 = St. Wates

B = St. Bandara Adi-Soemarmo

2 = St. Tugu Yogya

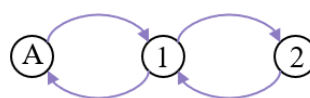
3 = St. Klaten

4 = St. Solo Balapan

5 = St. Palur

Dengan merepresentasikan bahwa bentuk lingkaran adalah stasiun transfer dan anak panah merepresentasikan tujuan perjalanan kereta Bandara dan *Commuter Line* Yogyakarta dari stasiun kepergian menuju stasiun destinasi, didefinisikan oleh beberapa rute tersebut:

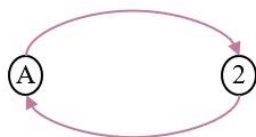
1. Rute 1 : Stasiun Bandara YIA - Stasiun Wates - Stasiun Tugu Yogyakarta.



Gambar 1. Rute 1

Rute dari Stasiun Bandara YIA ke Stasiun Tugu Yogyakarta maupun arah sebaliknya menggunakan kereta bandara YIA biasa.

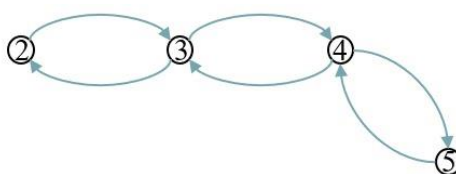
2. Rute 2 : Stasiun Bandara YIA - Stasiun Tugu Yogyakarta.



Gambar 2. Rute 2

Rute dari Stasiun Bandara YIA ke Stasiun Tugu Yogyakarta maupun arah sebaliknya menggunakan kereta Bandara YIA *Express*.

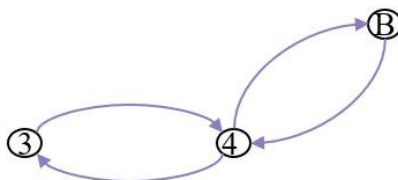
3. Rute 3 : Stasiun Tugu Yogyakarta - Stasiun Klaten - Stasiun Solo Balapan - Stasiun Palur.



Gambar 3. Rute 3

Rute dari stasiun Tugu Yogyakarta ke Stasiun Palur maupun arah sebaliknya menggunakan *Commuter Line* Yogyakarta.

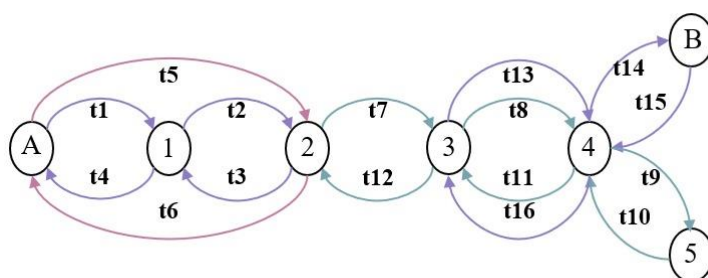
4. Rute 4 : Stasiun Klaten - Stasiun Solo Balapan - Stasiun Bandara Adi-Soemarmo.



Gambar 4. Rute 4

Rute dari Stasiun Klaten ke Stasiun Bandara Adi-Soemarmo maupun arah sebaliknya menggunakan kereta bandara Adi-Soemarmo (KA Bias).

Berdasarkan keempat rute diatas, dapat dibuat suatu graf berarah berbobot yang menghubungkan stasiun-stasiun transfer, sebagai berikut (penulisan Stasiun disingkat menjadi St.):



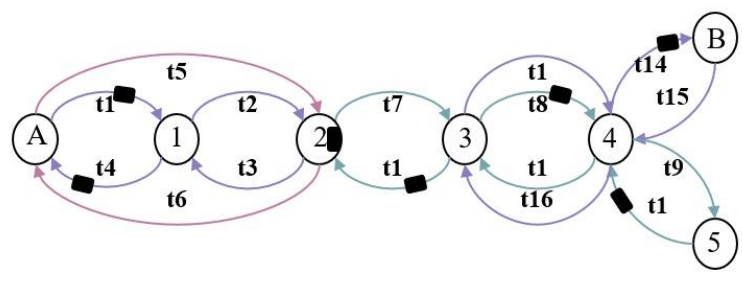
Gambar 5. Graf Berarah Berbobot

Setelah disusun graf berarah berbobot diberikan waktu tempuh kereta bandara YIA, kereta bandara Adi-Soemarmo, dan *Commuter Line* Yogyakarta. Penyusunan waktu tempuh didapatkan dari rata-rata total waktu yang dibutuhkan untuk satu kali perjalanan dari suatu stasiun menuju stasiun berikutnya oleh kereta. Informasi lebih lengkap dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1. Waktu Tempuh Kereta Bandara YIA, *Commuter Line* Yogyakarta, dan Kereta Bandara Adi-Soemarmo

Rute.	Dari	Tujuan	Waktu Tempuh	Banyak KA
1	Bandara YIA	Wates	$t_1 = 15 \text{ menit}$	1
1	Wates	Tugu	$t_2 = 24 \text{ menit}$	0
1	Tugu	Wates	$t_3 = 26 \text{ menit}$	1
1	Wates	Bandara YIA	$t_4 = 13 \text{ menit}$	0
2	Bandara YIA	Tugu	$t_5 = 35 \text{ menit}$	1
2	Tugu	Bandara YIA	$t_6 = 35 \text{ menit}$	0
3	Tugu	Klaten	$t_7 = 36 \text{ menit}$	1
3	Klaten	Solo Balapan	$t_8 = 34 \text{ menit}$	0
3	Solo Balapan	Palur	$t_9 = 10 \text{ menit}$	0
3	Palur	Solo Balapan	$t_{10} = 14 \text{ menit}$	1
3	Solo Balapan	Klaten	$t_{11} = 35 \text{ menit}$	0
3	Klaten	Tugu	$t_{12} = 33 \text{ menit}$	0
4	Klaten	Solo Balapan	$t_{13} = 34 \text{ menit}$	1
4	Solo Balapan	Bandara Adi-Soemarmo	$t_{14} = 25 \text{ menit}$	0
4	Bandara Adi-Soemarmo	Solo Balapan	$t_{15} = 19 \text{ menit}$	1
4	Solo Balapan	Klaten	$t_{16} = 53 \text{ menit}$	0

Dibawah ini adalah graf berarah berbobot dari sistem jaringan kereta pada waktu acuan yaitu pukul 11.30 WIB.



Gambar 6. Graf Berarah Berbobot pada Waktu Acuan

4.4 Sinkronisasi

Tahap selanjutnya akan dilakukan proses sinkronisasi guna membantu penumpang untuk beralih dari satu kereta menuju kereta lainnya dengan rute berbeda. Proses sinkronisasi dilakukan sesuai graf berarah berbobot pada keempat rute yang berbeda:

1. Rute 1: Stasiun A - Stasiun 1 - Stasiun 2 - Stasiun 1 - Stasiun A
 - a. kepergian kereta ke- r dari A ke 1, perlu menanti kemunculan kereta yang beroperasi ke- $(r - 1)$ dari 1 ke A di rute 1.
 - b. kepergian kereta ke- r dari 1 ke 2, perlu menanti kemunculan kereta yang beroperasi ke- $(r - 1)$ dari A ke 1 di rute 1.
 - c. kepergian kereta ke- r dari 2 ke 1, perlu menanti kemunculan kereta yang beroperasi ke- (r) dari 1 ke 2 di rute 1 dan menanti kemunculan kereta yang beroperasi ke- $(r - 1)$ dari 3 ke 2 di rute 3.
 - d. kepergian kereta ke- r dari 1 ke A, perlu menanti kemunculan kereta yang beroperasi ke- (r) dari 2 ke 1 di rute 1.
2. Rute 2: Stasiun A - Stasiun 2 - Stasiun A
 - a. kepergian kereta ke- r dari A ke 2, perlu menanti kemunculan kereta yang beroperasi ke- $(r - 1)$ dari 2 ke A di rute 2.
 - b. kepergian kereta ke- r dari 2 ke A, perlu menanti kemunculan kereta yang beroperasi ke- (r) dari A ke 2 di rute 2 dan menanti kemunculan kereta yang beroperasi ke- $(r - 1)$ dari 3 ke 2 di rute 3.
3. Rute 3: Stasiun 2 - Stasiun 3 - Stasiun 4 - Stasiun 5 - Stasiun 4 - Stasiun 3 - Stasiun 2
 - a. kepergian kereta ke- r dari 2 ke 3, perlu menanti kemunculan kereta yang beroperasi ke- $(r - 1)$ dari 3 ke 2 di rute 3, menanti kemunculan kereta yang beroperasi ke- (r) dari 1 ke 2 di rute 1, dan menanti kemunculan kereta yang beroperasi ke- (r) dari A ke 2 di rute 2.
 - b. kepergian kereta ke- r dari 3 ke 4, perlu menanti kemunculan kereta yang beroperasi ke- r dari 2 ke 3 di rute 3 dan menanti kemunculan kereta yang beroperasi ke- r dari 4 ke 3 di rute 4.
 - c. kepergian kereta ke- r dari 4 ke 5, perlu menanti kemunculan kereta yang beroperasi ke- $(r - 1)$ dari 3 ke 4 di rute 3 dan menanti kemunculan kereta yang beroperasi ke- k dari B ke 4 di rute 4.
 - d. kepergian kereta ke- r dari 5 ke 4, perlu menanti kemunculan kereta yang beroperasi ke- r dari 4 ke 5 di rute 3.

- e. kepergian kereta ke- r dari 4 ke 3, perlu menanti kemunculan kereta yang beroperasi ke- $(r - 1)$ dari 5 ke 4 di rute 3 dan menanti kemunculan kereta yang beroperasi ke- r dari **B** ke 4 di rute 4.
 - f. kepergian kereta ke- r dari 3 ke 2, perlu menanti kemunculan kereta yang beroperasi ke- r dari 4 ke 3 di rute 3 dan menanti kemunculan kereta yang beroperasi ke- r dari 4 ke 3 di rute 4.
4. Rute 4: Stasiun 3 - Stasiun 4 - Stasiun B - Stasiun 4 - Stasiun 3
- a. kepergian kereta ke- r dari 3 ke 4, perlu menanti kemunculan kereta yang beroperasi ke- r dari 4 ke 3 di rute 4 dan menanti kemunculan kereta yang beroperasi ke- r dari 2 ke 2 di rute 3.
 - b. kepergian kereta ke- r dari 4 ke **B**, perlu menanti kemunculan kereta yang beroperasi ke- r dari 3 ke 4 di rute 4, menanti kemunculan kereta yang beroperasi ke- $(r - 1)$ dari 3 ke 4 di rute 3, dan menanti kemunculan kereta yang beroperasi ke- $(r - 1)$ dari 5 ke 4 di rute 3.
 - c. kepergian kereta ke- r dari **B** ke 4, perlu menanti kemunculan kereta yang beroperasi ke- $(r - 1)$ dari 4 ke **B** di rute 4.
 - d. kepergian kereta ke- r dari 4 ke 3, perlu menanti kemunculan kereta yang beroperasi ke- r dari **B** ke 4 di rute 4.

4.5 Model Aljabar Max-Plus

Setelah dilakukan sinkronisasi, kemudian akan dilakukan proses pemodelan menggunakan aljabar max-plus. Proses pemodelan dilakukan dari mendefinisikan terlebih dahulu variabel untuk setiap busur yang menghubungkan stasiun-stasiun dari keempat rute yang telah ditentukan pada bagian sebelumnya. Data terkait definisi variabel dapat dilihat dalam Tabel 2.

Tabel 2. Definisi Variabel kepergian Kereta Bandara YIA, *Commuter Line* Yogyakarta, Kereta Bandara Adi-Soemarmo

Nama	Definisi kepergian Kereta dari:
$x_1(r - 1)$	A ke 1 ketika ke- $(r - 1)$ di rute 1
$x_2(r - 1)$	1 ke 2 ketika ke- $(r - 1)$ di rute 1
$x_3(r - 1)$	2 ke 1 ketika ke- $(r - 1)$ di rute 1
$x_4(r - 1)$	1 ke A ketika ke- $(r - 1)$ di rute 1
$x_5(r - 1)$	A ke 2 ketika ke- $(r - 1)$ di rute 2
$x_6(r - 1)$	2 ke A ketika ke- $(r - 1)$ di rute 2
$x_7(r - 1)$	2 ke 3 ketika ke- $(r - 1)$ di rute 3
$x_8(r - 1)$	3 ke 4 ketika ke- $(r - 1)$ di rute 3
$x_9(r - 1)$	4 ke 5 ketika ke- $(r - 1)$ di rute 3
$x_{10}(r - 1)$	5 ke 4 ketika ke- $(r - 1)$ di rute 3

Nama	Definisi kepergian Kereta dari:
$x_{11}(r-1)$	4 ke 3 ketika ke $-(r-1)$ di rute 3
$x_{12}(r-1)$	3 ke 2 ketika ke $-(r-1)$ di rute 3
$x_{13}(r-1)$	3 ke 4 ketika ke $-(r-1)$ di rute 4
$x_{14}(r-1)$	4 ke B ketika ke $-(r-1)$ di rute 4
$x_{15}(r-1)$	B ke 4 ketika ke $-(r-1)$ di rute 4
$x_{16}(r-1)$	4 ke 3 ketika ke $-(r-1)$ di rute 4
$x_1(r)$	A ke 1 ketika ke $-(r)$ di rute 1
$x_2(r)$	1 ke 2 ketika ke $-(r)$ di rute 1
$x_3(r)$	2 ke 1 ketika ke $-(r)$ di rute 1
$x_4(r)$	1 ke A ketika ke $-(r)$ di rute 1
$x_5(r)$	A ke 2 ketika ke $-(r)$ di rute 2
$x_6(r)$	2 ke A ketika ke $-(r)$ di rute 2
$x_7(r)$	2 ke 3 ketika ke $-(r)$ di rute 3
$x_8(r)$	3 ke 4 ketika ke $-(r)$ di rute 3
$x_9(r)$	4 ke 5 ketika ke $-(r)$ di rute 3
$x_{10}(r)$	5 ke 4 ketika ke $-(r)$ di rute 3
$x_{11}(r)$	4 ke 3 ketika ke $-(r)$ di rute 3
$x_{12}(r)$	3 ke 2 ketika ke $-(r)$ di rute 3
$x_{13}(r)$	3 ke 4 ketika ke $-(r)$ di rute 4
$x_{14}(r)$	4 ke B ketika ke $-(r)$ di rute 4
$x_{15}(r)$	B ke 4 ketika ke $-(r)$ di rute 4
$x_{16}(r)$	4 ke 3 ketika ke $-(r)$ di rute 4

Berdasarkan Tabel 2, disusun pemodelan matematika menggunakan aljabar max-plus untuk setiap rute sebelum dilakukan proses sinkronisasi.

Rute 1

$$x_1(r) = t_4 \otimes x_4(r-1) = 13 \otimes x_4(r-1), x_2(r) = t_1 \otimes x_1(r-1) = 15 \otimes x_1(r-1),$$

$$x_3(r) = t_2 \otimes x_2(r) = t_2 \otimes t_1 \otimes x_1(r-1) = 39 \otimes x_1(r-1),$$

$$x_4(r) = t_3 \otimes x_3(r) = t_3 \otimes t_2 \otimes t_1 \otimes x_1(r-1) = 65 \otimes x_1(r-1)$$

Rute 2

$$x_5(r) = t_6 \otimes x_6(r-1) = 3 \otimes 5 \otimes x_6(r-1), x_6(r) = t_5 \otimes x_5(r) = t_5 \otimes t_6 \otimes x_6(r-1) = 70 \otimes x_6(r-1)$$

Rute 3

$$x_7(r) = t_{12} \otimes x_{12}(r-1) = 33 \otimes x_{12}(r-1), x_8(r) = t_7 \otimes x_7(r) = t_7 \otimes t_{12} \otimes x_{12}(r-1) \\ = 69 \otimes x_{12}(r-1)$$

$$x_9(r) = t_8 \otimes x_8(r-1) = 37 \otimes x_8(r-1), x_{10}(r) = t_9 \otimes x_9(r) = t_9 \otimes t_8 \otimes x_8(r-1) = 47 \otimes x_8(r-1)$$

$$x_{11}(r) = t_{10} \otimes x_{10}(r-1) = 14 \otimes x_{10}(r-1),$$

$$x_{12}(r) = t_{11} \otimes x_{11}(r) = t_{11} \otimes t_{10} \otimes x_{10}(r-1) = 49 \otimes x_{10}(r-1)$$

Rute 4

$$x_{13}(r) = t_{16} \otimes x_{16}(r) = t_{16} \otimes t_{15} \otimes t_{14} \otimes x_{14}(r-1) = 97 \otimes x_{14}(r-1)$$

$$x_{14}(r) = t_{13} \otimes x_{13}(r) = t_{13} \otimes t_{16} \otimes t_{15} \otimes t_{14} \otimes x_{14}(r-1) = 131 \otimes x_{14}(r-1)$$

$$x_{15}(r) = t_{14} \otimes x_{14}(r-1) = 25 \otimes x_{14}(r-1),$$

$$x_{16}(r) = t_{15} \otimes x_{15}(r) = t_{15} \otimes t_{14} \otimes x_{14}(r-1) = 44 \otimes x_{14}(r-1)$$

Berdasarkan hasil pemodelan matematika yang telah dilakukan sinkronisasi, didapatkan persamaan matriks $x(k) = A \otimes x(r - 1)$, di mana matriks A adalah matriks dengan ordo 16×16 sebagai berikut

	ε	ε	ε	13	ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε
15	ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε
39	ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε	33	ε	ε	ε	ε
65	ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε	59	ε	ε	ε	ε
ε	ε	ε	ε	ε	35	ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε
ε	ε	ε	ε	ε	70	ε	ε	ε	ε	ε	33	ε	ε	ε	ε
39	ε	ε	ε	ε	70	ε	ε	ε	ε	ε	33	ε	ε	ε	ε
75	ε	ε	ε	ε	106	ε	ε	ε	67	ε	69	ε	97	ε	ε
109	ε	ε	ε	ε	140	ε	34	ε	101	ε	103	ε	131	ε	ε
119	ε	ε	ε	ε	150	ε	47	ε	111	ε	113	ε	141	ε	ε
109	ε	ε	ε	ε	140	ε	ε	ε	101	ε	103	ε	131	ε	ε
144	ε	ε	ε	ε	175	ε	ε	ε	136	ε	138	ε	166	ε	ε
75	ε	ε	ε	ε	106	ε	ε	ε	67	ε	69	ε	97	ε	ε
109	ε	ε	ε	ε	140	ε	34	ε	101	ε	103	ε	131	ε	ε
ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε	25	ε	ε
ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε	14	ε	ε	ε	44	ε	ε

Gambar 7. Matriks A

4.6 Sifat Periodik Sistem

Berdasarkan matriks A yang didapat dari pemodelan matematika dari sinkronisasi keempat rute yang terhubung dengan stasiun - stasiun transfer. Dalam proses analisis matriks A akan dilakukan perhitungan nilai eigen beserta vektor eigen menggunakan bantuan *Software Scilab*. Dengan menggunakan aplikasi tersebut, didapatkan nilai eigen $\lambda(A) = 138$. Nilai eigen berarti periode kepergian kereta di setiap stasiun awal yaitu setiap $\lambda(A)$ sekali, yaitu 138 menit sekali atau 2 jam 18 menit. Dalam aljabar max-plus, nilai eigen ini dapat ditentukan dengan beberapa metode, salah satunya metode rata-rata siklus maksimum [16]. Metode ini digunakan untuk

menghitung nilai eigen sebagai rata-rata bobot maksimum dari semua siklus yang mungkin dalam graf berarah yang terbentuk dari matriks A . Penentuan nilai eigen dilakukan dengan cara menghitung jejak dari pangkat-pangkat matriks, lalu membagi hasilnya dengan pangkat k dan mengambil nilai maksimum dari semua hasil tersebut. Rumusnya dinyatakan sebagai berikut:

$$\lambda_{\max}(A) = \bigoplus_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{k} \text{trace}(A^k) \right\}$$

Sementara, untuk nilai vektor minimum yaitu 262 dan vektor eigen matriks A yang memiliki ukuran 16×1 , yaitu:

$$v = \begin{bmatrix} 385 \\ 262 \\ 381 \\ 484 \\ 554 \\ 564 \\ 520 \\ 554 \\ 484 \\ 510 \\ 484 \\ 520 \\ 554 \\ 589 \\ 441 \\ 460 \end{bmatrix}$$

Gambar 8. Matriks v

Dikarenakan jadwal kereta bersifat periodik sehingga dapat dibuat jadwal kepergian baru menggunakan hasil nilai eigen dari vektor eigen matriks A sebagai kondisi awal [9]. Dalam proses penjadwalan kepergian akan digunakan vektor akhir kepergian yang diperoleh dari $v' = v \otimes (-\min(v))$. Persamaan tersebut menggambarkan proses normalisasi vektor eigen v untuk memastikan bahwa semua elemen dalam vektor A dimulai dari waktu referensi nol. Dengan cara menggeser nilai dalam vektor berdasarkan waktu yang paling awal. Proses ini dilakukan untuk menjaga hubungan antar elemen vektor dan mempermudah penerapan jadwal dalam sistem [17].

Sehingga didapat vektor akhir kepergian (v') yang memiliki ukuran 16×1 , yaitu:

$$v' = \begin{bmatrix} 123 \\ 0 \\ 119 \\ 222 \\ 292 \\ 302 \\ 258 \\ 292 \\ 222 \\ 248 \\ 222 \\ 258 \\ 292 \\ 327 \\ 179 \\ 198 \end{bmatrix}$$

Gambar 9. Matriks v'

4.7 Desain Penjadwalan

Berdasarkan hasil nilai eigen $\lambda(A) = 138$ atau 2 jam 18 menit, kita akan membuat desain penjadwalan kepergian kereta bandara dan *Commuter Line* Yogyakarta yang baru. Hasil $[v']_{2,1} = [0]$ maka kepergian *Commuter Line* Yogyakarta dari Stasiun Wates menuju Stasiun Tugu Yogyakarta menjadi titik acuan. kepergian awal dari Stasiun Wates menuju Stasiun Tugu Yogyakarta yang sebenarnya adalah pukul 05:57 WIB. Jadi, waktu kepergian awal setiap stasiun akan berubah menyesuaikan kepergian awal sebenarnya dari Stasiun Wates menuju Stasiun Tugu Yogyakarta.

Selanjutnya, untuk masing-masing rute dapat disusun jadwal kepergian baru dan dengan memperhatikan jadwal kepergian sebenarnya dan selisihnya. Berdasarkan jadwal kepergian masing-masing rute kemudian ditetapkan kembali jadwal kereta alternatif yang telah disinkronisasi dari keempat rute seperti dalam Tabel 3 sampai dengan Tabel 6 berikut. Jadwal alternatif ini dapat dijadikan referensi oleh PT KAI dalam penyusunan jadwal kepergian kereta dari empat rute yang berbeda untuk kereta Bandara YIA, *Commuter Line* Yogyakarta, dan kereta Bandara Adi-Soemarmo.

Tabel 3. Pilihan Rencana Jadwal kepergian Rute 1: Stasiun Bandara YIA - Stasiun Wates - Stasiun Tugu Yogyakarta

Rute		Jadwal kepergian I	Jadwal kepergian II
Bandara YIA	Wates	08:00	14:54
Wates	Tugu Yogyakarta	08:15	15:09
Tugu Yogyakarta	Wates	08:39	15:33
Wates	Bandara YIA	09:05	15:59

Tabel 4. Pilihan Rencana Jadwal kepergian Rute 2: Stasiun Bandara YIA - Stasiun Tugu Yogyakarta

Rute		Jadwal kepergian I	Jadwal kepergian II
Tugu Yogyakarta	Bandara YIA	09:39	16:33
Bandara YIA	Tugu Yogyakarta	10:14	17:08

Tabel 5. Pilihan Rencana Jadwal kepergian Rute 3: Stasiun Tugu Yogyakarta - Stasiun Klaten - Stasiun Solo Balapan - Stasiun Palur

Rute		Jadwal kepergian I	Jadwal kepergian II
Tugu Yogyakarta	Klaten	09:39	16:33
Klaten	Solo Balapan	10:15	17:09
Solo Balapan	Palur	10:49	17:43
Palur	Solo Balapan	10:59	17:53
Solo Balapan	Klaten	12:07	19:01
Klaten	Tugu Yogyakarta	12:42	19:36

Tabel 6. Pilihan Rencana Jadwal kepergian Rute 4: Stasiun Klaten - Stasiun Solo Balapan - Stasiun Bandara Adi-Soemarmo

Rute		Jadwal kepergian I	Jadwal kepergian II
Klaten	Solo Balapan	10:15	17:09
Solo Balapan	Bandara Adi-Soemarmo	10:49	17:43
Bandara Adi-Soemarmo	Solo Balapan	11:14	18:08
Solo Balapan	Klaten	11:33	18:27

4 Simpulan

Berdasarkan penelitian dan analisis yang dilakukan pada penjadwalan kereta bandara Yogyakarta International Airport, kereta bandara Adi-Soemarmo, dan *Commuter Line* Yogyakarta, peneliti menyimpulkan:

1. Jaringan kereta bandara Yogyakarta International Airport, *Commuter Line* Yogyakarta, dan kereta bandara Adi-Soemarmo bisa dimodelkan memanfaatkan aljabar max-plus dengan model umum R_{max} yaitu $x(k) = A \otimes (k - 1)$. Pada bentuk umum, A merupakan matriks dengan ordo 16×16 dengan vector $x(k - 1)$ merupakan waktu kepergian kereta ke- $(k - 1)$ dari semua kereta.
2. Penjadwalan kereta bandara Adi-Soemarmo, kereta bandara Yogyakarta, *Commuter Line* Yogyakarta mempunyai periode kepergian dari setiap stasiun *transfer*, yaitu setiap $\lambda(A) = 138$ atau 2 jam 18 menit. Waktu kepergian awal kereta di masing-masing stasiun didapatkan dari vektor eigen.

5 Daftar Pustaka

- [1] Y. Natalia, I. W. Sudarsana, dan D. Lusiyan, “Pemodelan Waktu Tunggu Penumpang Pada Jalur Angkutan Dalam Kota Palu Menggunakan Aljabar Max-Plus,” *J. Ilm. Mat. Dan Terap.*, vol. 16, hlm. 33–41, Jun 2019.
- [2] N. Rakhmawati dan R. Febriyanti, “Penerapan Aljabar Max-Plus Pada Permasalahan Penjadwalan Angkutan Perdesaan di Jombang,” *J. Mat. MANTIK*, vol. 03, Okt 2017.
- [3] E. Susilowati dan R. Widayati, “Penjadwalan Kereta Api Daop 8 Surabaya Menggunakan Aljabar Max-Plus,” *SAINTIFIK J. Mat. Sains Dan Pembelajarannya*, vol. 10, hlm. 67–74, Jan 2024, doi: 10.31065.
- [4] “Kereta Prameks Resmi Setop Operasi, Diganti KRL Solo-Jogja.” [Daring]. Tersedia pada: <https://www.cnnindonesia.com/ekonomi/20210210144914-92-604756/kereta-prameks-resmi-setop-operasi-diganti-krl-solo-jogja#:~:text=Rute%20perjalanan%20kereta%20Solo%2DJogja,meningkat%20dari%20waktu%20ke%20waktu.>
- [5] M. H. Purnama dan E. Yuliyawati, “Kajian Optimalisasi Bandar Udara International Adi Sumarmo Solo melalui Peningkatan Konektivitas antara Solo-Yogyakarta dengan Angkutan Kereta Api Khusus Bandar Udara,” *War. ARDHIA J. Perhub. Udara*, vol. 43, hlm. 125–140, Des 2017.
- [6] M. R. Akbar, “Cara naik KA Bandara YIA dari Stasiun Tugu Yogyakarta dan Harga Tiketnya.” [Daring]. Tersedia pada: <https://www.detik.com/jogja/bisnis/d-7168403/cara-naik-ka-bandara-yia-dari-stasiun-tugu-yogyakarta-dan-harga-tiketnya#:~:text=KA%20Bandara%20YIA%20melayani%20perjalanan,menuju%20Kota%20Jogja%20atau%20sebaliknya.>
- [7] M. A. Giovanny, Ircham, dan H. P. Astutik, “Studi Pengguna Kereta Api Bandara Yogyakarta Internasional Airport,” *EQUILIB J. Mhs. Tek. Sipil*, vol. 2, hlm. 131–140, Feb 2022.
- [8] S. L. R. Radityani, “Pemodelan Jaringan dan Analisa Penjadwalan Kereta Api Komuter di DAOP VI Yogyakarta Dengan Menggunakan Aljabar Max-Plus,” Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta, 2016.
- [9] Subiono, *Aljabar Max-Plus dan Terapannya*. Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh November, 2015.
- [10] A. Afif, “Aplikasi Petri Net dan Aljabar Max-Plus Pada Sistem Jaringan Kereta Api di Jawa Timur,” Institut Teknologi Sepuluh November, Surabaya, 2015.

- [11] I. Fakhila, Y. Rusdiana, dan T. H. Setiawan, “Pemodelan Jaringan Dan Analisa Penjadwalan KRL Commuter Line Jabodetabek Dengan Menggunakan Metode Aljabar Max-Plus,” *Indones. J. Sci.*, vol. 2, Mar 2021, [Daring]. Tersedia pada: <http://journal.pusatsains.com/index.php/jsi>
- [12] E. R. Babbie, *The Practice of Social Research*, 14 vol. Cengage Learning, 2016.
- [13] J. W. Creswell dan J. D. Creswell, *Research Design: Qualitative, Quantitative, and Mixed Methods Approaches*, 5 ed. Sage Publications, 2017.
- [14] M. A. Rudhito, *Aljabar Max-Plus dan Penerapannya*. Yogyakarta: Sanata Dharma University Press Anggota APPTI (Asosiasi Penerbit Perguruan Tinggi Indonesia), 2016.
- [15] G. Hedley, “Linear Algebra,” 1961.
- [16] W. Melinasari, Suroto, dan S. R. Nurshiami, “Eksistensi Nilai Eigen Pada Matriks Atas Aljabar Max-Plus,” *Pros. Semin. Nas. Mat. Stat. Dan Apl.*, Agu 2023.
- [17] R. M. P. Goverde, “The max-plus algebra approach to railway timetable design.,” 1998.