

Bilangan Kromatik Lokasi Amalgamasi Sisi Graf Lingkaran $amal_s(C_n^j; v_{j,l}v_{j,n})$ dengan $n = 3, 4, 1 \leq j \leq m$, dan $m \geq 2$

Des Welyyanti^{1 *}, Romie Daramenra², Lyra Yulianti³

^{1,2,3}Program Studi Matematika,

^{1,2,3}Departemen Matematika dan Sains Data, FMIPA, Universitas Andalas, Padang, Indonesia
e-mail: wely@sci.unand.ac.id

Diajukan: 11 Nopember 2024, Diperbaiki: 17 September 2025, Diterima: 30 September 2025

Abstrak

Misalkan G adalah graf terhubung dan $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ adalah partisi terurut dari $V(G)$. Misalkan S_i adalah himpunan kelas warna menggunakan warna $1, 2, \dots, k$ dimana k bilangan bulat positif. Kode warna $c_\Pi(v)$ pada titik v di G terhadap Π didefinisikan sebagai k vektor $c_\Pi(v) = (d(v, S_1), d(v, S_2), \dots, d(v, S_i))$ dimana $d(v, S_i) = \min\{d(v, x) \mid x \in S_i\}$, untuk $1 \leq i \leq k$. Jika setiap titik v di graf G mempunyai kode warna yang berbeda, maka c disebut pewarnaan lokasi dari G . Minimum warna yang digunakan untuk pewarnaan lokasi disebut bilangan kromatik lokasi dari G , dinotasikan dengan $\chi_L(G)$. Pada artikel ini akan dibahas bilangan kromatik lokasi amalgamasi sisi graf lingkaran $amal_s(C_n^j; v_{j,l}v_{j,n})$ dengan $n = 3, 4, 1 \leq j \leq m$, dan $m \geq 2$.

Kata Kunci: Bilangan Kromatik Lokasi, Graf Lingkaran, Amalgamasi Sisi, Kode Warna, Partisi

Abstract

Let G be a connected graph and $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ be an ordered partition of $V(G)$. Let S_i is a set of color classes using colors $1, 2, \dots, k$ where k as positive integer. The color code $c_\Pi(v)$ of vertex v in G with respect to Π is defined as k -vector, $c_\Pi(v) = (d(v, S_1), d(v, S_2), \dots, d(v, S_i))$ where $d(v, S_i) = \min\{d(v, x) \mid x \in S_i\}$ for $1 \leq i \leq k$. If each of vertices in G have distinct color codes, then c is called as locating coloring of G . The minimum number of colors that are used for locating coloring is called as locating chromatic number of G , denoted by $\chi_L(G)$. In this article we will discuss the chromatic number of the side amalgamation location of the circle graph $amal_s(C_n^j; v_{j,l}v_{j,n})$ with $n = 3, 4, 1 \leq j \leq m$, and $m \geq 2$.

Keywords: Locating Chromatic Number, Circle Graph, Edge Amalgamation, Color Code, Partition

1 Pendahuluan

Konsep bilangan kromatik lokasi merupakan perpaduan dari konsep dimensi partisi dan pewarnaan titik. Pewarnaan titik suatu graf adalah pemberian warna ke semua titik dari graf dengan ketentuan setiap titik yang bertetangga diberi warna yang berbeda. Jika warna yang digunakan dalam pewarnaan titik dari graf G sebanyak k , maka graf G mempunyai k -pewarnaan. Misalkan $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ dengan Π adalah partisi terurut dari $V(G)$ dan S_i adalah himpunan kelas warna dengan menggunakan warna $1, 2, \dots, k$ dimana k bilangan bulat positif. Kode warna $c_\Pi(v)$ pada titik v di G terhadap Π didefinisikan sebagai k -vektor, $c_\Pi(v) =$

$(d(v, S_1), d(v, S_1), \dots, d(v, S_i))$, dimana $d(v, S_i) = \min\{d(v, x) | x \in S_i\}$, untuk $1 \leq i \leq k$. Jika setiap titik v di graf G mempunyai kode warna yang berbeda, maka c disebut pewarnaan lokasi dari G . Warna minimum yang digunakan untuk pewarnaan lokasi dari graf G disebut bilangan kromatik lokasi dari G , dinotasikan dengan $\chi_L(G)$.

Bilangan kromatik lokasi pertama kali diperkenalkan oleh Chartrand, dkk[1]. pada tahun 2002. Chartrand, dkk. juga memperoleh bilangan kromatik lokasi dari graf lintasan (P_n) dan graf lingkaran (C_n). Pada tahun 2011, Asmiati, dkk.[2] menentukan bilangan kromatik lokasi amalgamasi bintang yang dihubungkan oleh suatu lintasan. Asmiati, dkk.[3] juga berhasil memperoleh bilangan kromatik lokasi untuk graf kembang api. Pada tahun 2012, Asmiati dan Baskoro[4] berhasil mengkarakterisasi semua graf yang memuat siklus dengan bilangan kromatik lokasi tiga. Bilangan kromatik lokasi untuk pohon n -ary lengkap juga telah diperoleh oleh Welyyanti, dkk.[5] pada tahun 2013. Selanjutnya, Welyyanti, dkk.[6] memberikan batas atas untuk bilangan kromatik lokasi graf terhubung dimana setiap komponen memuat satu titik dominan. Asmiati, dkk.[7] juga telah menemukan bilangan kromatik lokasi dari amalgamasi bintang yang dihubungkan oleh suatu lintasan. Hartiansyah dan Darmaji[8] telah menentukan bilangan kromatik lokasi dari graf hasil amalgamasi sisi dari graf bintang dengan orde $m + 1$ dan graf lengkap dengan orde n . Soleha, dkk.[9] menemukan bilangan kromatik lokasi dari amalgamasi graf bintang yang dihubungkan oleh suatu graf lingkaran. Pada tahun 2023, Welyyanti, dkk.[10] menentukan bilangan kromatik lokasi pada graf amalgamasi kipas berekor. Welyyanti, dkk.[11] telah menemukan bilangan kromatik lokasi graf helm (H_m) untuk $10 \leq m \leq 8$.

Amalgamasi graf merupakan suatu operasi pada graf tertentu. Misalkan G_1 dan G_2 dengan adalah graf terhubung. Graf G_1 dan G_2 dapat diamalgamasi sisi dengan mengidentifikasi sisi $x \in E(G_1)$ dan sisi $y \in E(G_2)$ sehingga membentuk sisi baru yaitu sisi xy . Graf amalgamasi sisi dapat dinotasikan dengan $\text{amal}_s(G_1, G_2; xy)$ [12].

Graf Lingkaran C_n merupakan graf terhubung yang memiliki n titik dengan masing-masing titiknya berderajat dua dan dinotasikan dengan C_n dengan $n \geq 3$ [13]. Misalkan terdapat m buah graf lingkaran C_n , dinotasikan $C_n^1, \dots, C_n^j, \dots, C_n^m$, untuk $m \geq 2$ dan $n \geq 3$. Banyaknya graf lingkaran yang diamalgamasikan, dinotasikan m dan banyaknya titik pada setiap graf lingkaran, dinotasikan n . Graf C_n^j menyatakan graf lingkaran ke- j dari m buah graf lingkaran yang diamalgamasikan dengan $1 \leq j \leq m$. Amalgamasi sisi dari m graf lingkaran dapat dibentuk dengan mengidentifikasi sisi-sisi yang bersesuaian dari graf lingkaran yang dinotasikan dengan $\text{amal}_s(C_n^j; v_{j,l}, v_{j,n})$ dengan $1 \leq j \leq m$ dan $v_{j,l}, v_{j,n}$ adalah sisi yang diidentifikasi dari graf C_n^j . Sisi yang diidentifikasi tersebut disatukan sehingga membentuk sisi baru yang dinamakan sisi xy .

Notasikan $Z = amal_s(C_n^j; v_{j,l}v_{j,n})$ dengan $1 \leq j \leq m$ sehingga graf Z mempunyai himpunan titik dan himpunan sisi sebagai berikut.

$$V(Z) = \{x, y\} \cup \{v_{j,l} | 1 \leq j \leq m, 2 \leq l \leq n-1\},$$

$$E(Z) = \{x, y\} \cup \{xv_{j,q-1} | 1 \leq j \leq m, 2 \leq q \leq n-1\} \cup \dots \cup \{v_{j,q-1}v_{j,q} | 1 \leq j \leq m, 2 \leq q \leq n-1\} \cup \{v_{j,q}y | 1 \leq j \leq m\}.$$

Misalkan $Z_1 = amal_s(C_3^j; v_{j,l}v_{j,n})$ menyatakan amalgamasi sisi graf lingkaran dengan $n = 3$ dan $m \geq 2$. Graf Z_1 mempunyai himpunan titik dan himpunan sisi sebagai berikut.

$$V(Z_1) = \{x, v_{j,2}, y | 1 \leq j \leq m\},$$

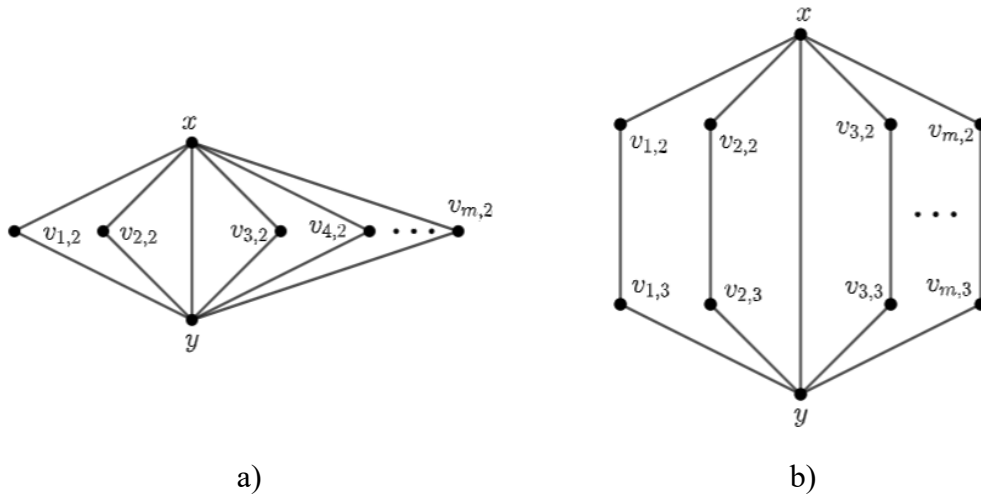
$$E(Z_1) = \{xy\} \cup \{xv_{j,2}, v_{j,2}y | 1 \leq j \leq m\}.$$

Misalkan $Z_2 = amal_s(C_4^j; v_{j,l}v_{j,n})$ menyatakan amalgamasi sisi graf lingkaran dengan $n = 4$ dan $m \geq 2$. Graf Z_2 mempunyai himpunan titik dan himpunan sisi sebagai berikut.

$$V(Z_2) = \{x, v_{j,2}, v_{j,3}, y | 1 \leq j \leq m\},$$

$$E(Z_2) = \{xy\} \cup \{xv_{j,2}, v_{j,2}v_{j,3}, v_{j,3}y | 1 \leq j \leq m\}.$$

Graf Z_1 dan Z_2 dapat dilihat pada Gambar 1 berikut.



Gambar 1. a) Graf Z_1 dan b) Graf Z_2

2 Metode Penelitian

Bilangan kromatik lokasi amalgamasi sisi graf lingkaran $amal_s(C_n^j; v_{j,l}v_{j,n})$ dengan $n = 3, 4, 1 \leq j \leq m$, dan $m \geq 2$ dapat ditentukan dengan menggunakan langkah-langkah sebagai berikut.

1. Menentukan bilangan kromatik lokasi graf $amal_s(C_3^j; v_{j,l}v_{j,n})$ untuk $n = 3$ dan $m \geq 2$ dengan menentukan batas atas dan batas bawah bilangan kromatik lokasi graf tersebut. Batas atas bilangan kromatik lokasi graf $amal_s(C_3^j; v_{j,l}v_{j,n})$ dapat ditentukan dengan

menunjukkan kode warna yang berbeda pada setiap titik graf tersebut. Selanjutnya, penentuan batas bawah bilangan kromatik lokasi graf $\text{amal}_s(C_3^j; v_{j,l}v_{j,n})$. Jika batas bawah tidak memenuhi syarat bilangan kromatik lokasi, maka dilakukan penambahan warna sehingga syarat bilangan kromatik lokasi terpenuhi.

- Menentukan bilangan kromatik lokasi graf $\text{amal}_s(C_4^j; v_{j,l}v_{j,n})$ untuk $n = 4$ dan $m \geq 2$ dengan menentukan batas atas dan batas bawah bilangan kromatik lokasi graf tersebut. Batas atas bilangan kromatik lokasi graf $\text{amal}_s(C_4^j; v_{j,l}v_{j,n})$ dapat ditentukan dengan menunjukkan kode warna yang berbeda pada setiap titik graf tersebut. Selanjutnya, penentuan batas bawah bilangan kromatik lokasi graf $\text{amal}_s(C_4^j; v_{j,l}v_{j,n})$. Jika batas bawah tidak memenuhi syarat bilangan kromatik lokasi, maka dilakukan penambahan warna sehingga syarat bilangan kromatik lokasi terpenuhi.

3 Hasil dan Pembahasan

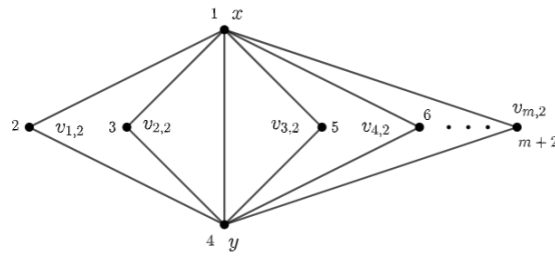
Bilangan kromatik lokasi amalgamasi sisi graf lingkaran $\text{amal}_s(C_n^j; v_{j,l}v_{j,n})$ dengan $n = 3,4, 1 \leq j \leq m$, dan $m \geq 2$ dapat ditentukan dengan menggunakan dua teorema. Teorema 1 digunakan untuk menentukan bilangan kromatik lokasi graf $\text{amal}_s(C_3^j; v_{j,l}v_{j,n})$ untuk $n = 3$ dan $m \geq 2$.

Teorema 1. Misalkan graf $\text{amal}_s(C_3^j; v_{j,l}v_{j,n})$ adalah graf hasil amalgamasi sisi dari sebanyak m graf lingkaran C_3 , dengan $m \geq 2$ dan $1 \leq j \leq m$, maka bilangan mkromatik lokasi dari graf $\text{amal}_s(C_3^j; v_{j,l}v_{j,n})$ adalah $m+2$.

Bukti. Misalkan $Z_1 = \text{amal}_s(C_3^j; v_{j,l}v_{j,n})$, dengan $v_{j,l}v_{j,n}$ untuk $1 \leq j \leq m$ adalah sisi-sisi bersesuaian yang diidentifikasi dan diamalgamasikan sehingga membentuk sisi baru yng dinamakan sisi xy . Titik x dan y pada graf Z_1 diberi warna, yaitu $c(x) = 1$ dan $c(y) = 4$. Pewarnaan titik $v_{j,2}$ pada graf Z_1 dapat dilihat pada Tabel 1 dan Gambar 2 sebagai berikut.

Tabel 1. Warna titik $v_{j,2}$ pada graf Z_1

j	$v_{j,2}$	j	$v_{j,2}$
1	2	4	6
2	3	$\vdots$	$\vdots$
3	4	m	$m+2$



Gambar 2. $(m + 2)$ -pewarnaan lokasi graf Z_1

Misalkan $c: v(C_n^j) \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, m + 2\}$ sedemikian sehingga

$$c(v) = \begin{cases} 1, \text{ untuk } v = x, \\ 2, \text{ untuk } v = v_{1,2}, \\ 3, \text{ untuk } v = v_{2,2}, \\ 4, \text{ untuk } v = y, \\ 5, \text{ untuk } v = v_{3,2}, \\ 6, \text{ untuk } v = v_{4,2}, \\ \vdots \\ m + 2, \text{ untuk } v = v_{m,2}, m \geq 2. \end{cases}$$

Diperoleh kode warna setiap titik graf Z_1 sebagai berikut.

$$\begin{aligned} c_{\Pi}(x) &= (0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots, 1, 1), \\ c_{\Pi}(v_{1,2}) &= (1, 0, 2, 1, 2, 2, 2, \dots, 2, 2), \\ c_{\Pi}(v_{2,2}) &= (1, 2, 0, 1, 2, 2, 2, \dots, 2, 2), \\ c_{\Pi}(v_{3,2}) &= (1, 2, 2, 1, 0, 2, 2, \dots, 2, 2), \\ c_{\Pi}(v_{4,2}) &= (1, 2, 2, 1, 2, 0, 2, \dots, 2, 2), \\ c_{\Pi}(v_{5,2}) &= (1, 2, 2, 1, 2, 2, 0, \dots, 2, 2), \\ &\vdots \\ c_{\Pi}(v_{m,2}) &= (1, 2, 2, 1, 2, 2, 2, \dots, 2, 0). \end{aligned}$$

Karena setiap titik dari graf Z_1 memiliki kode warna yang berbeda sehingga $\chi_L(Z_1) \leq m + 2$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\chi_L(Z_1) \geq m + 2$. Andaikan $\chi_L(Z_1) = m + 2$, artinya graf Z_1 mempunyai $(m + 1)$ -pewarnaan lokasi. Tanpa mengurangi perumuman, misalkan $c(x) = 1$ dan $c(y) = 4$. Berdasarkan Tabel 1, jika graf Z_1 mempunyai $(m + 1)$ pewarnaan titik, maka terdapat dua sebarang titik dengan warna yang sama, yaitu titik $v_{f,2}$ dan $v_{h,2}$ untuk suatu $1 \leq f, h \leq m$ dengan $f \neq h$. Karena dua titik tersebut mempunyai jarak yang sama ke titik yang lain selain dirinya sendiri, maka kode warna dua titik tersebut sama. Jadi, haruslah $\chi_L(Z_1) \geq m + 2$.

Pada teorema selanjutnya membahas bilangan kromatik lokasi graf $amal_s(C_4^j; v_{j,l}v_{j,n})$ untuk $n = 4$ dan $m \geq 2$.

Teorema 2. Misalkan graf $\text{amal}_s(C_4^j; v_{j,l}, v_{j,n})$ adalah graf hasil amalgamasi sisi dari sebanyak m graf lingkaran C_4 , dengan $m \geq 2$ dan $1 \leq j \leq m$, maka

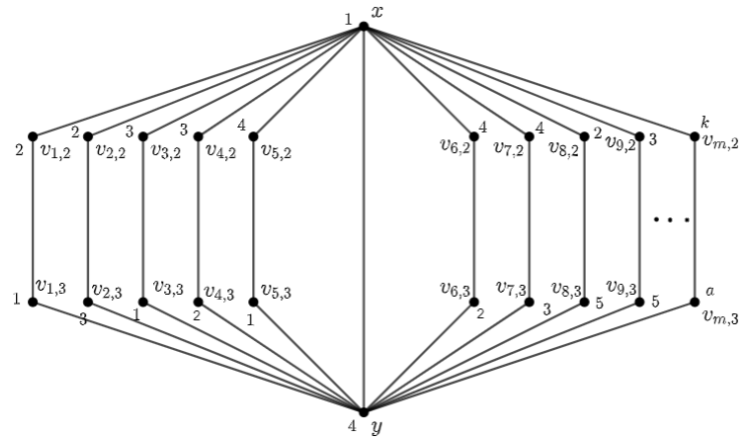
$$\chi_L(\text{amal}_s(C_4^j; v_{j,l}, v_{j,n})) = \begin{cases} 4, & \text{untuk } n = 4 \text{ dan } 2 \leq m \leq 7, \\ k, & \text{untuk } n = 4 \text{ dan } k^2 - 5k + 8 \leq m \\ & \leq k^2 - 3k + 3 \text{ dengan } k \geq 5. \end{cases}$$

Bukti. Misalkan $Z_2 = \text{amal}_s(C_4^j; v_{j,l}, v_{j,n})$, dengan $v_{j,l}, v_{j,n}$ untuk $1 \leq j \leq m$ adalah sisi-sisi bersesuaian yang diidentifikasi dan diamalgamasikan sehingga membentuk sisi baru yang dinamakan sisi xy . Titik x dan y pada graf Z_2 diberi warna, yaitu $c(x) = 1$ dan $c(y) = 4$. Pewarnaan titik $v_{j,2}$ dan $v_{j,3}$ pada graf Z_2 dapat dilihat berdasarkan pasangan warna kedua titik tersebut yang ditunjukkan Tabel 2 dan Gambar 3 sebagai berikut.

Tabel 2. Pasangan warna titik $v_{j,2}$ dan $v_{j,3}$ pada graf Z_2

j	$c(v_{j,2})$	$c(v_{j,3})$
1	2	1
2	2	3
3	3	1
4	3	2
5	4	1
6	4	2
7	4	3
8	2	5
9	3	5
10	4	5
11	5	1
12	5	2
13	5	3
14	2	6
15	3	6
16	4	6
17	5	6

j	$c(v_{j,2})$	$c(v_{j,3})$
18	6	1
19	6	2
20	6	3
21	6	5
22	2	7
23	3	7
24	4	7
25	5	7
26	6	7
27	7	1
28	7	2
29	7	3
30	7	5
31	7	6
m	$2 \leq f \leq k - 1$	k
	k	$k - 1 \leq h \leq 1$ dimana $h \neq 4$ dan $h \neq k$

Gambar 3. k -pewarnaan lokasi graf Z_2

Berdasarkan pewarnaan titik pada graf Z_2 , diperoleh kode warna pada setiap titik graf seperti yang ditunjukkan pada Tabel 3 berikut.

Tabel 3. $\chi_L(Z_2) = k$ dengan $k \geq 4$

Pewarnaan Titik	Kode Warna	$\chi_L(Z_2)$
$c: v(C_4^7) \rightarrow \{1,2,3,4\}$ sedemikian sehingga $c(v) = \begin{cases} 1, \text{ untuk } v = x, v_{1,3}, v_{3,3}, v_{5,3} \\ 2, \text{ untuk } v = v_{1,2}, v_{2,2}, v_{4,3}, v_{6,3} \\ 3, \text{ untuk } v = v_{2,3}, v_{3,2}, v_{4,2}, v_{7,3} \\ 4, \text{ untuk } v = y, v_{5,2}, v_{6,2}, v_{7,2} \end{cases}$	$c_\Pi(x) = (0,1,1,1)$ $c_\Pi(v_{1,2}) = (1,0,2,2)$ $c_\Pi(v_{1,3}) = (0,1,2,1)$ $c_\Pi(v_{2,2}) = (1,0,1,2)$ $c_\Pi(v_{2,3}) = (2,1,0,1)$ $c_\Pi(v_{3,2}) = (1,2,0,2)$ $c_\Pi(v_{3,3}) = (0,2,1,1)$ $c_\Pi(v_{4,2}) = (1,1,0,2)$ $c_\Pi(v_{4,3}) = (2,0,1,1)$ $c_\Pi(v_{5,2}) = (1,2,2,0)$ $c_\Pi(v_{5,3}) = (0,2,2,1)$ $c_\Pi(v_{6,2}) = (1,1,2,0)$ $c_\Pi(v_{6,3}) = (2,0,2,1)$ $c_\Pi(v_{7,2}) = (1,2,1,0)$ $c_\Pi(v_{7,3}) = (2,2,0,1)$ $c_\Pi(y) = (1,1,1,0)$	4
$c: v(C_4^{13}) \rightarrow \{1,2,3,4,5\}$ sedemikian sehingga $c(v) = \begin{cases} 1, \text{ untuk } v = x, v_{1,3}, v_{3,3}, v_{5,3}, v_{11,3} \\ 2, \text{ untuk } v = v_{1,2}, v_{2,2}, v_{4,3}, v_{6,3}, v_{8,2}, \\ v_{12,3} \\ 3, \text{ untuk } v = v_{2,3}, v_{3,2}, v_{4,2}, v_{7,3}, v_{9,2}, \\ v_{13,3} \\ 5, \text{ untuk } v = v_{8,3}, v_{9,3}, v_{10,3}, v_{11,2}, \\ v_{12,2}, v_{13,2} \\ 4, \text{ untuk } v = y, v_{5,2}, v_{6,2}, v_{7,2}, v_{10,2} \end{cases}$	$c_\Pi(x) = (0,1,1,1,1)$ $c_\Pi(v_{1,2}) = (1,0,2,2,2)$ $c_\Pi(v_{1,3}) = (0,1,2,1,2)$ $c_\Pi(v_{2,2}) = (1,0,1,2,2)$ $c_\Pi(v_{2,3}) = (2,1,0,1,2)$ $c_\Pi(v_{8,2}) = (1,0,2,2,1)$ $c_\Pi(v_{8,3}) = (2,1,2,1,0)$ $c_\Pi(v_{3,2}) = (1,2,0,2,2)$ $c_\Pi(v_{3,3}) = (0,2,1,1,2)$	5

Pewarnaan Titik	Kode Warna	$\chi_L(Z_2)$
	$c_{\Pi}(v_{4,2}) = (1,1,0,2,2)$ $c_{\Pi}(v_{4,3}) = (2,0,1,1,2)$ $c_{\Pi}(v_{9,2}) = (1,2,0,2,1)$ $c_{\Pi}(v_{9,3}) = (2,2,1,1,0)$ $c_{\Pi}(v_{5,2}) = (1,2,2,0,2)$ $c_{\Pi}(v_{5,3}) = (0,2,2,1,2)$ $c_{\Pi}(v_{6,2}) = (1,1,2,0,2)$ $c_{\Pi}(v_{6,3}) = (2,0,2,1,2)$ $c_{\Pi}(v_{7,2}) = (1,2,1,0,2)$ $c_{\Pi}(v_{7,3}) = (2,2,0,1,2)$ $c_{\Pi}(v_{10,2}) = (1,2,2,0,1)$ $c_{\Pi}(v_{10,3}) = (2,2,2,1,0)$ $c_{\Pi}(v_{11,2}) = (1,2,2,2,0)$ $c_{\Pi}(v_{11,3}) = (0,2,2,1,1)$ $c_{\Pi}(v_{12,2}) = (1,1,2,2,0)$ $c_{\Pi}(v_{12,3}) = (2,0,2,1,1)$ $c_{\Pi}(v_{13,2}) = (1,2,1,2,0)$ $c_{\Pi}(v_{13,3}) = (2,2,0,1,1)$ $c_{\Pi}(y) = (1,1,1,0,1)$	
$c: v(C_4^{21}) \rightarrow \{1,2,3,4,5,6\}$ sedemikian sehingga $c(v) = \begin{cases} 1, \text{ untuk } v = x, v_{1,3}, v_{3,3}, v_{5,3}, v_{11,3}, \\ \quad v_{18,3} \\ 2, \text{ untuk } v = v_{1,2}, v_{2,2}, v_{4,3}, v_{6,3}, v_{8,2}, \\ \quad v_{12,3}, v_{14,2}, v_{19,3} \\ 3, \text{ untuk } v = v_{2,3}, v_{3,2}, v_{4,2}, v_{7,3}, v_{9,2}, \\ \quad v_{13,3}, v_{15,2}, v_{20,3} \\ 5, \text{ untuk } v = v_{8,3}, v_{9,3}, v_{10,3}, v_{11,2}, \\ \quad v_{12,2}, v_{13,2}, v_{17,2}, v_{21,3} \\ 6, \text{ untuk } v = v_{14,3}, v_{15,3}, v_{16,3}, v_{17,3}, \\ \quad v_{18,2}, v_{19,2}, v_{20,2}, v_{21,2} \\ 4, \text{ untuk } v = y, v_{5,2}, v_{6,2}, v_{7,2}, v_{10,2}, v_{16,2} \end{cases}$	$c_{\Pi}(x) = (0,1,1,1,1,1)$ $c_{\Pi}(v_{1,2}) = (1,0,2,2,2,2)$ $c_{\Pi}(v_{1,3}) = (0,1,2,1,2,2)$ $c_{\Pi}(v_{2,2}) = (1,0,1,2,2,2)$ $c_{\Pi}(v_{2,3}) = (2,1,0,1,2,2)$ $c_{\Pi}(v_{8,2}) = (1,0,2,2,1,2)$ $c_{\Pi}(v_{8,3}) = (2,1,2,1,0,2)$ $c_{\Pi}(v_{14,2}) = (1,0,2,2,2,1)$ $c_{\Pi}(v_{14,3}) = (2,1,2,1,2,0)$ $c_{\Pi}(v_{3,2}) = (1,2,0,2,2,2)$ $c_{\Pi}(v_{3,3}) = (0,2,1,1,2,2)$ $c_{\Pi}(v_{4,2}) = (1,1,0,2,2,2)$ $c_{\Pi}(v_{4,3}) = (2,0,1,1,2,2)$ $c_{\Pi}(v_{9,2}) = (1,2,0,2,1,2)$ $c_{\Pi}(v_{9,3}) = (2,2,1,1,0,2)$ $c_{\Pi}(v_{15,2}) = (1,2,0,2,2,1)$ $c_{\Pi}(v_{15,3}) = (2,2,1,1,2,0)$ $c_{\Pi}(v_{5,2}) = (1,2,2,0,2,2)$ $c_{\Pi}(v_{5,3}) = (0,2,2,1,2,2)$ $c_{\Pi}(v_{6,2}) = (1,1,2,0,2,2)$ $c_{\Pi}(v_{6,3}) = (2,0,2,1,2,2)$	6

Pewarnaan Titik	Kode Warna	$\chi_L(\mathbb{Z}_2)$
	$c_{\Pi}(v_{7,2}) = (1,2,1,0,2,2)$ $c_{\Pi}(v_{7,3}) = (2,2,0,1,2,2)$ $c_{\Pi}(v_{10,2}) = (1,2,2,0,1,2)$ $c_{\Pi}(v_{10,3}) = (2,2,2,1,0,2)$ $c_{\Pi}(v_{16,2}) = (1,2,2,0,2,1)$ $c_{\Pi}(v_{16,3}) = (2,2,2,1,2,0)$ $c_{\Pi}(v_{11,2}) = (1,2,2,2,0,2)$ $c_{\Pi}(v_{11,3}) = (0,2,2,1,1,2)$ $c_{\Pi}(v_{12,2}) = (1,1,2,2,0,2)$ $c_{\Pi}(v_{12,3}) = (2,0,2,1,1,2)$ $c_{\Pi}(v_{13,2}) = (1,2,1,2,0,2)$ $c_{\Pi}(v_{13,3}) = (2,2,0,1,1,2)$ $c_{\Pi}(v_{17,2}) = (1,2,2,2,0,1)$ $c_{\Pi}(v_{17,3}) = (2,2,2,1,1,0)$ $c_{\Pi}(v_{18,2}) = (1,2,2,2,2,0)$ $c_{\Pi}(v_{18,3}) = (0,2,2,1,2,1)$ $c_{\Pi}(v_{19,2}) = (1,1,2,2,2,0)$ $c_{\Pi}(v_{19,3}) = (2,0,2,1,2,1)$ $c_{\Pi}(v_{20,2}) = (1,2,1,2,2,0)$ $c_{\Pi}(v_{20,3}) = (2,2,0,1,2,1)$ $c_{\Pi}(v_{21,2}) = (1,2,2,2,1,0)$ $c_{\Pi}(v_{21,3}) = (2,2,2,1,0,1)$ $c_{\Pi}(y) = (1,1,1,0,1,1)$	
$c: v(C_4^{31}) \rightarrow \{1,2,3,4,5,6,7\}$ sedemikian sehingga $c(v) = \begin{cases} 1, \text{ untuk } v = x, v_{1,3}, v_{3,3}, v_{5,3}, v_{11,3}, v_{18,3}, \\ \quad v_{27,3} \\ 2, \text{ untuk } v = v_{1,2}, v_{2,2}, v_{4,3}, v_{6,3}, v_{8,2}, v_{12,3}, \\ \quad v_{14,2}, v_{19,3}, v_{22,2}, v_{28,3} \\ 3, \text{ untuk } v = v_{2,3}, v_{3,2}, v_{4,2}, v_{7,3}, v_{9,2}, v_{13,3}, \\ \quad v_{15,2}, v_{20,3}, v_{23,2}, v_{29,3} \\ 5, \text{ untuk } v = v_{8,3}, v_{9,3}, v_{10,3}, v_{11,2}, v_{12,2}, \\ \quad v_{13,2}, v_{17,2}, v_{21,3}, v_{25,2}, v_{30,3} \\ 6, \text{ untuk } v = v_{14,3}, v_{15,3}, v_{16,3}, v_{17,3}, v_{18,2}, \\ \quad v_{19,2}, v_{20,2}, v_{21,2}, v_{26,2}, v_{31,3} \\ 7, \text{ untuk } v = v_{22,3}, v_{23,3}, v_{24,3}, v_{25,3}, v_{26,3}, \\ \quad v_{27,2}, v_{28,2}, v_{29,2}, v_{30,2}, v_{31,2} \\ 4, \text{ untuk } v = y, v_{5,2}, v_{6,2}, v_{7,2}, v_{10,2}, v_{16,2}, \\ \quad v_{24,2} \end{cases}$	$c_{\Pi}(x) = (0,1,1,1,1,1)$ $c_{\Pi}(v_{1,2}) = (1,0,2,2,2,2)$ $c_{\Pi}(v_{1,3}) = (0,1,2,1,2,2)$ $c_{\Pi}(v_{2,2}) = (1,0,1,2,2,2)$ $c_{\Pi}(v_{2,3}) = (2,1,0,1,2,2)$ $c_{\Pi}(v_{8,2}) = (1,0,2,2,1,2)$ $c_{\Pi}(v_{8,3}) = (2,1,2,1,0,2)$ $c_{\Pi}(v_{14,2}) = (1,0,2,2,2,1)$ $c_{\Pi}(v_{14,3}) = (2,1,2,1,2,0)$ $c_{\Pi}(v_{22,2}) = (1,0,2,2,2,2)$ $c_{\Pi}(v_{22,3}) = (2,1,2,1,2,2)$ $c_{\Pi}(v_{3,2}) = (1,2,0,2,2,2)$ $c_{\Pi}(v_{3,3}) = (0,2,1,1,2,2)$ $c_{\Pi}(v_{4,2}) = (1,1,0,2,2,2)$ $c_{\Pi}(v_{4,3}) = (2,0,1,1,2,2)$ $c_{\Pi}(v_{9,2}) = (1,2,0,2,1,2)$ $c_{\Pi}(v_{9,3}) = (2,2,1,1,0,2)$	7

Pewarnaan Titik	Kode Warna	$\chi_L(Z_2)$
	$c_{\Pi}(v_{15,2}) = (1,2,0,2,2,1,2)$ $c_{\Pi}(v_{15,3}) = (2,2,1,1,2,0,2)$ $c_{\Pi}(v_{23,2}) = (1,2,0,2,2,2,1)$ $c_{\Pi}(v_{23,3}) = (2,2,1,1,2,2,0)$ $c_{\Pi}(v_{5,2}) = (1,2,2,0,2,2,2)$ $c_{\Pi}(v_{5,3}) = (0,2,2,1,2,2,2)$ $c_{\Pi}(v_{6,2}) = (1,1,2,0,2,2,2)$ $c_{\Pi}(v_{6,3}) = (2,0,2,1,2,2,2)$ $c_{\Pi}(v_{7,2}) = (1,2,1,0,2,2,2)$ $c_{\Pi}(v_{7,3}) = (2,2,0,1,2,2,2)$ $c_{\Pi}(v_{10,2}) = (1,2,2,0,1,2,2)$ $c_{\Pi}(v_{10,3}) = (2,2,2,1,0,2,2)$ $c_{\Pi}(v_{16,2}) = (1,2,2,0,2,1,2)$ $c_{\Pi}(v_{16,3}) = (2,2,2,1,2,0,2)$ $c_{\Pi}(v_{24,2}) = (1,2,2,0,2,2,1)$ $c_{\Pi}(v_{24,3}) = (2,2,2,1,2,2,0)$ $c_{\Pi}(v_{11,2}) = (1,2,2,2,0,2,2)$ $c_{\Pi}(v_{11,3}) = (0,2,2,1,1,2,2)$ $c_{\Pi}(v_{12,2}) = (1,1,2,2,0,2,2)$ $c_{\Pi}(v_{12,3}) = (2,0,2,1,1,2,2)$ $c_{\Pi}(v_{13,2}) = (1,2,1,2,0,2,2)$ $c_{\Pi}(v_{13,3}) = (2,2,0,1,1,2,2)$ $c_{\Pi}(v_{17,2}) = (1,2,2,2,0,1,2)$ $c_{\Pi}(v_{17,3}) = (2,2,2,1,1,0,2)$ $c_{\Pi}(v_{25,2}) = (1,2,2,2,0,2,1)$ $c_{\Pi}(v_{25,3}) = (2,2,2,1,1,2,0)$ $c_{\Pi}(v_{18,2}) = (1,2,2,2,2,0,2)$ $c_{\Pi}(v_{18,3}) = (0,2,2,1,2,1,2)$ $c_{\Pi}(v_{19,2}) = (1,1,2,2,2,0,2)$ $c_{\Pi}(v_{19,3}) = (2,0,2,1,2,1,2)$ $c_{\Pi}(v_{20,2}) = (1,2,1,2,2,0,2)$ $c_{\Pi}(v_{20,3}) = (2,2,0,1,2,1,2)$ $c_{\Pi}(v_{21,2}) = (1,2,2,2,1,0,2)$ $c_{\Pi}(v_{21,3}) = (2,2,2,1,0,1,2)$ $c_{\Pi}(v_{26,2}) = (1,2,2,2,2,0,1)$ $c_{\Pi}(v_{26,3}) = (2,2,2,1,2,1,0)$ $c_{\Pi}(v_{27,2}) = (1,2,2,2,2,2,0)$ $c_{\Pi}(v_{27,3}) = (0,2,2,1,2,2,1)$ $c_{\Pi}(v_{28,2}) = (1,1,2,2,2,2,0)$ $c_{\Pi}(v_{28,3}) = (2,0,2,1,2,2,1)$	

Pewarnaan Titik	Kode Warna	$\chi_L(Z_2)$
	$c_{\Pi}(v_{29,2}) = (1,2,1,2,2,2,0)$ $c_{\Pi}(v_{29,3}) = (2,2,0,1,2,2,1)$ $c_{\Pi}(v_{30,2}) = (1,2,2,2,1,2,0)$ $c_{\Pi}(v_{30,3}) = (2,2,2,1,0,2,1)$ $c_{\Pi}(v_{31,2}) = (1,2,2,2,2,1,0)$ $c_{\Pi}(v_{31,3}) = (2,2,2,1,2,0,1)$ $c_{\Pi}(y) = (1,1,1,0,1,1,1)$	

Berdasarkan Tabel 3, diperoleh bilangan kromatik lokasi graf $Z_2 = amal_s(C_4^j; v_{j,l}v_{j,n})$ sebagai berikut.

$$\chi_L(Z_2) = 4, \text{ untuk } 2 \leq m \leq 7,$$

$$\chi_L(Z_2) = 5, \text{ untuk } 8 \leq m \leq 13,$$

$$\chi_L(Z_2) = 6, \text{ untuk } 14 \leq m \leq 21,$$

$$\chi_L(Z_2) = 7, \text{ untuk } 22 \leq m \leq 31.$$

Bilangan kromatik lokasi graf $Z_2 = amal_s(C_4^j; v_{j,l}v_{j,n})$ dapat diperumum dengan menggunakan konsep bilangan aritmatika bertingkat dua sehingga diperoleh

$$\chi_L(amal_s(C_4^j; v_{j,l}v_{j,n})) = \begin{cases} 4, \text{ untuk } n = 4 \text{ dan } 2 \leq m \leq 7, \\ k, \text{ untuk } n = 4 \text{ dan } k^2 - 5k + 8 \leq m \\ \leq k^2 - 3k + 3 \text{ dengan } k \geq 5. \end{cases}$$

Batas bawah bilangan kromatik lokasi graf Z_2 dapat dilakukan dengan dua metode. Metode pertama adalah menunjukkan bahwa $\chi_L(Z_2) \geq 4$ untuk $2 \leq m \leq 7$. Andaikan $\chi_L(Z_2) = 3$. Tanpa mengurangi perumuman, misalkan $c(x) = 1$ dan $c(y) = 3$. Akibatnya, terdapat dua titik yang mempunyai warna yang sama, yaitu $c(v_{f,3}) = x = 1$ dan $c(v_{h,2}) = y = 3$ untuk suatu $1 \leq f, h \leq m$ dengan $f \neq h$ sehingga dua titik tersebut memiliki kode warna yang sama. Jadi, haruslah $\chi_L(Z_2) \geq 4$.

Metode yang kedua adalah menunjukkan bahwa $\chi_L(Z_2) \geq k$ untuk $k \geq 5$. Andaikan $\chi_L(Z_2) = k - 1$. Tanpa mengurangi perumuman, misalkan $c(x) = 1$ dan $c(y) = 4$ sehingga terdapat $k - 3$ warna yang akan dikombinasikan pada titik $v_{j,2}$ dan $v_{j,3}$. Berdasarkan Tabel 2, jika graf Z_2 mempunyai $(k - 1)$ -pewarnaan lokasi, maka terdapat dua sebarang titik yang memiliki warna yang sama, yaitu $v_{f,2}$ dan $v_{h,3}$ untuk suatu $1 \leq f, h \leq m$ dengan $f \neq h$. Jadi, haruslah $\chi_L(Z_2) \geq k$.

4 Simpulan

Pada penelitian ini, diperoleh bilangan kromatik lokasi amalgamasi sisi graf lingkaran $\text{amal}_s(C_n^j; v_{j,l}v_{j,n})$ dengan $n = 3,4, 1 \leq j \leq m$, dan $m \geq 2$ sebagai berikut.

$$\chi_L(\text{amal}_s(C_n^j; v_{j,l}v_{j,n})) = \begin{cases} m+2, & \text{untuk } n=3 \text{ dan } m \geq 2, \\ 4, & \text{untuk } n=4 \text{ dan } 2 \leq m \leq 7, \\ k, & \text{untuk } n=4 \text{ dan } k^2 - 5k + 8 \leq m \\ & \leq k^2 - 3k + 3 \text{ dengan } k \geq 5. \end{cases}$$

6 Daftar Pustaka

- [1] P. Z. G. Chartrand, D. Erwin, M. A. Henning, P. J. Slater, "The locating-chromatic number of a graph," *Bull.Inst.Combin.Appl*, vol. 36, pp. 8–101, 2002.
- [2] Asmiati, H. Assiyatun, and E. T. Baskoro, "Locating-chromatic number of amalgamation of stars," *ITB J. Sci.*, vol. 43 A, no. 1, pp. 1–8, 2011, doi: 10.5614/itbj.sci.2011.43.1.1.
- [3] Asmiati, E. T. Baskoro, H. Assiyatun, D. Suprijanto, R. Simanjuntak, and S. Uttunggadewa, "The locating-chromatic number of firecracker graphs," *Far East J. Math. Sci.*, vol. 63, no. 1, pp. 11–23, 2012.
- [4] Asmiati and E. T. Baskoro, "Characterizing all graphs containing cycles with locating-chromatic number 3," in *AIP Conference Proceedings*, 2012, pp. 351–357. doi: 10.1063/1.4724167.
- [5] D. Welyyanti, E. T. Baskoro, R. Simanjuntak, and S. Uttunggadewa, "On locating-chromatic number of complete n-ary tree," 2013.
- [6] D. Welyyanti, E. T. Baskoro, R. Simanjuntak, and S. Uttunggadewa, "On Locating-chromatic Number for Graphs with Dominant Vertices," in *Procedia Computer Science*, Elsevier B.V., 2015, pp. 89–92. doi: 10.1016/j.procs.2015.12.081.
- [7] A. Asmiati, L. Yulianti, and C. I. T. Widyastuti, "Further Results on Locating Chromatic Number for Amalgamation of Stars Linking by One Path," *Indones. J. Comb.*, vol. 2, no. 1, p. 50, 2018, doi: 10.19184/ijc.2018.2.1.6.
- [8] F. Hartiansyah and D. Darmaji, "Bilangan Kromatik Lokasi pada Graf Hasil Amalgamasi Sisi dari Graf Bintang dan Graf Lengkap," *Zeta - Math J.*, vol. 8, no. 2, pp. 66–70, Jul. 2023, doi: 10.31102/zeta.2023.8.2.66-70.
- [9] R. P. Soleha, "Bilangan Kromatik Lokasi dari Hasil Amalgamasi Graf Bintang yang Dihubungkan oleh Suatu Graf Lingkaran," *J. Mat. UNAND*, vol. IX, no. 1, pp. 46–52, 2020.
- [10] N. Andriani, "Bilangan Kromatik Lokasi Pada Graf Amalgamasi Kipas Berekor," *Limits J. Math. Its Appl.*, vol. 20, no. 1, p. 81, 2023, doi: 10.12962/limits.v20i1.12948.
- [11] D. Welyyanti, D. Sutanto, and L. Yulianti, "Jurnal Natural," *J. Nat.*, vol. 24, no. 2, pp. 115–

- 127, 2024, doi: 10.24815/jn.v24i2.29356.
- [12] H. Iswadi, E. T. Baskoro, A. N. M. Salman, and R. Simanjuntak, “The Resolving Graph of Amalgamation of Cycles.”
- [13] F. Abdmouleh, “Bulletin of the Title : LINEAR OPERATORS,” vol. 40, no. 5, pp. 1057–1066, 2014.