

Dinamika Solusi dan Kontrol Optimal Model Penyakit ISPA di Kota Malang

Lukman Hakim^{1*}, Lilis Widayanti²

^{1,2}Fakultas Teknologi dan Desain, Institut Teknologi dan Bisnis Asia, Malang, Indonesia
bledek.lukman@asia.ac.id

Diajukan: 13 Mei 2025, Diperbaiki: 14 Juli 2025, Diterima: 15 Juli 2025

Abstrak

Pada penelitian ini menggunakan model matematika berbentuk persamaan diferensial biasa nonlinear untuk menggambarkan penyebaran penyakit ISPA. Model matematika yang telah dikonstruksi terdiri dari lima kompartemen, yaitu populasi rentan, populasi tervaksin, populasi laten, populasi terinfeksi, dan populasi sembuh. Hasil analisis dinamik yang telah dilakukan mendapatkan dua titik kesetimbangan model. Titik kesetimbangan pertama, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit yang akan bersifat stabil dengan kondisi tertentu. Adapun titik kesetimbangan kedua, yaitu titik kesetimbangan endemik yang akan selalu stabil asimtotik. Selanjutnya, estimasi parameter dilakukan dengan metode *lsqcurvefit*, dan diperoleh nilai MAPE sebesar 13,10% dari proses *fitting data*. Hasil estimasi parameter digunakan untuk simulasi dan diimplementasikan dalam analisis sensitivitas. Berdasarkan pada analisis sensitivitas parameter diperoleh indeks sensitivitas yang paling positif terhadap R_0 yaitu π dan β , sedangkan indeks sensitivitas yang paling negatif terhadap R_0 adalah μ dan α . Selanjutnya, masalah kontrol optimal penyebaran penyakit ISPA diformulasikan dengan menambahkan dua variabel kontrol, yaitu upaya pengurangan kontak langsung antara individu rentan dan individu terinfeksi, dan upaya peningkatan intensitas pengobatan. Masalah kontrol optimal diselesaikan dengan prinsip minimum pontryagin. Fungsi tujuan diformulasikan dalam bentuk fungsi Lagrange yang bertujuan untuk meminimumkan populasi laten dan populasi terinfeksi, serta meningkatkan jumlah populasi yang tervaksin dan populasi sembuh. Bagian akhir ditampilkan simulasi numerik yang telah dikerjakan untuk mendukung hasil analisis, dan terlihat bahwa hasil simulasi telah sejalan dengan fungsi tujuan yang telah dikonstruksi.

Kata Kunci: Model ISPA, Titik Kesetimbangan, Kontrol Optimal, Prinsip Pontryagin, Kota Malang

Abstract

*In this study, a nonlinear ordinary differential equation mathematical model is utilized to describe the spread of Acute Respiratory Infections (ARI). The formulated mathematical model consists of five compartments: the susceptible population, the vaccinated population, the latent population, the infected population, and the recovered population. The dynamic analysis yields two equilibrium points of the model. The first equilibrium point, the disease-free equilibrium, is stable with some conditions. The second equilibrium point, the endemic equilibrium, is always asymptotically stable. Subsequently, parameter estimation is performed using the *lsqcurvefit* method, resulting in a Mean Absolute Percentage Error (MAPE) value of 13.10% from the data fitting data. The estimated parameters are used for simulations and implemented in sensitivity analysis. Based on the parameter sensitivity analysis, the most positively sensitive indices to R_0 are π and β , whereas the most negatively sensitive indices to reproductive numbers are μ and α . Furthermore, the optimal control problem for ARI transmission is formulated by introducing two control variables: (1) efforts to reduce direct contact between susceptible and infected individuals, and (2) efforts to increase treatment intensity. The optimal control problem is solved using Pontryagin's minimum principle. The objective function is formulated as a Lagrange function aimed to minimize the latent and infected populations while increasing the vaccinated and recovered populations. Finally,*

numerical simulations are presented to support the analytical results, demonstrating that the simulation outcomes align with the constructed objective function

Keywords: ISPA Models, Fixed Points, Optimal Control, Pontryagin Principle, Malang City

1 Pendahuluan

Infeksi Saluran Pernafasan Akut (ISPA) merupakan infeksi pernafasan yang disebabkan oleh jenis bakteri *Streptococcus haemophilus* atau *Staphylococcus aureus*. Dewasa ini, ISPA telah menjadi penyakit yang secara umum mudah untuk menjangkit masyarakat umum, dan penyakit ISPA cenderung menginfeksi para balita dan manula. Infeksi ISPA menjadi salah satu penyumbang dan penyebab kematian pada kelompok balita. Secara umum penyakit ISPA terbagi menjadi dua kategori, yaitu ISPA bagian atas yang menginfeksi saluran pernapasan daerah hidung, dan ISPA bagian bawah yang mencakup beberapa bagian pernapasan dari atas hingga bagian terdalam paru-paru bahkan hingga alveoli. Adapun beberapa infeksi yang termasuk dalam kategori ISPA yaitu infeksi sinusitis, pleura, dan rongga telinga bagian tengah [1]. Selain itu, informasi penting terkait infeksi ISPA yaitu sifat penyebaran ISPA mudah untuk menular melalui makanan ataupun *droplet* terlebih ketika didukung dengan kondisi sanitasi lingkungan yang kurang baik.

Mengacu pada data kesehatan dunia bahwa tahun 2007, penyakit ISPA merupakan penyumbang terbesar dalam kasus kematian (*morbidity*) di belahan dunia. Prakiraan empat juta individu telah meninggal karena terjangkit ISPA, dan sekitar 98% disebabkan oleh infeksi ISPA bagian bawah [2]. Indonesia telah mendeklarasikan bahwa penularan ISPA menjadi permasalahan serius yang harus diperhatikan dan perlu dikendalikan di tengah-tengah masyarakat. Berdasarkan pada data Kementerian Kesehatan Republik Indonesia hingga bulan Agustus 2023 penyakit ISPA di Indonesia telah menyentuh pada angka 1,3 juta kasus. Kota Malang menjadi salah satu kota penyumbang kasus ISPA dengan cakupan terbesar di Indonesia. Pada semester pertama tahun 2023, kasus ISPA di kota Malang terlapor mencapai angka 43.000 jiwa [3]. Memperhatikan hal tersebut, maka penyakit ISPA harus diperhatikan dan dikendalikan dengan strategi-strategi yang ada agar terwujudnya *health society* dan nihil kematian yang diakibat oleh infeksi ISPA.

Fakta dan informasi yang telah diutarakan sebelumnya, salah satu strategi pengendalian yang dapat dilakukan dengan pendekatan ilmu matematika. Implementasi ilmu matematika yang dapat diterapkan dalam bentuk pemodelan matematika yang dapat merepresentasikan dan memodifikasi masalah sosial menjadi bentuk persamaan matematika [4]. Biasanya sistem persamaan matematika diformulasikan dalam bentuk persamaan diferensial. Adapun model matematika yang banyak digunakan dan sekaligus sebagai pondasi awal untuk merepresentasikan suatu penyebaran penyakit, yaitu model dasar *SIR* – Kermack dan McKendrick [5]. Penelitian lain telah mengkaji masalah infeksi pernafasan dengan pemodelan matematika untuk mengidentifikasi permasalahan

cidera yang terjadi pada paru-paru, sehingga hasilnya digunakan sebagai acuan dalam pengobatan infeksi pernafasan [6]. Pada tahun 2020, terdapat penelitian pemodelan penyakit ISPA yang memberikan hasil kajian bahwa infeksi ISPA akan berpengaruh terhadap kinerja dan fungsi paru-paru [7]. Adapun model matematika lain berbentuk *SEHAR* dengan lima kompartemen digunakan untuk menggambarkan penyebaran ISPA [2]. Tahun 2022, penelitian lain tentang penyebaran penyakit ISPA dengan mempertimbangkan adanya kasus infeksi reguler dan super infeksi pernafasan [8]. Pengembangan model penyebaran ISPA dilakukan dengan memperhatikan kasus infeksi COVID-19 yang dapat berakibat terjadinya *co-infection* terhadap penyakit lain yang berkaitan dengan sistem pernafasan manusia [9]. Pada tahun 2023 kajian tentang identifikasi dari berbagai macam faktor-faktor penyebab individu akan terjangkit infeksi *Acute Respiratory Infection* (ARI) [10]. Model matematika penyebaran penyakit ISPA terbaru telah dikaji dan dianalisis dengan memperhatikan lokasi dan anatomi dari bakteri penyebab ISPA [1].

Secara umum kajian tentang model matematika yang dipaparkan pada paragraph sebelumnya terfokus pada analisis dinamika dan perilaku solusi dari suatu sistem yang digunakan sebagai strategi untuk mengendalikan infeksi pernafasan. Selain itu, strategi pengendalian yang dapat diimplementasikan pada model matematika, yaitu melalui pendekatan teori kontrol optimal [11]. Salah satu penelitian yang telah dikaji bahwa kontrol optimal dapat diimplementasikan dalam mengendalikan penyebaran penyakit Hepatitis-B [12], dan pengontrolan penyebaran penyakit kanker Servik dengan strategi vaksinasi dan skrining [13]. Selain itu, teori kontrol optimal digunakan dalam pengontrolan penyebaran penyakit Malaria dengan memperhatikan adanya faktor musiman keberadaan nyamuk [14], sedangkan pada tahun 2021 teori kontrol optimal digunakan penyakit Ebola dengan usaha pengobatan sebagai kontrolnya [15]. Sebagai tambahan, bahwa kontrol optimal dikonstruksi untuk mengendalikan penyebaran COVID-19 dengan upaya *social distancing* dan penggunaan masker [16], dan pengontrolan kasus COVID-19 dengan strategi yang digunakan terfokus pada kelompok yang tervaksin dan terkarantina [17].

Uraian sebelumnya menunjukkan secara jelas pada penelitian bahwa model matematika dan masalah kontrol optimal dapat diimplementasikan dalam pengontrolan suatu penyakit. Dengan demikian, penelitian ini terfokus pada konstruksi model penyebaran ISPA dengan data infeksi ISPA di Kota Malang. Selanjutnya, model ISPA dikembangkan dengan menambahkan variabel kontrol, yaitu kontrol berupa upaya untuk pembatasan interaksi individu rentan dan individu terinfeksi, dan kontrol berupa usaha peningkatan pengobatan terhadap populasi terinfeksi. Pada penelitian ini terbagi menjadi beberapa bagian, yaitu latar belakang, asumsi pemodelan matematika, pembahasan analisis dinamika model, penyelesaian masalah kontrol optimal, dan simulasi numerik.

2 Model Matematika

Model matematika penyakit ISPA pada penelitian ini dikonstruksi dengan lima kompartemen, yaitu individu yang rentan (S), individu yang ter vaksin (V), individu yang terpapar ISPA akan tetapi tidak menunjukkan adanya infeksi atau laten (E), individu yang terinfeksi ISPA (I), dan individu yang telah sembuh dari ISPA (S). Adapun asumsi yang digunakan untuk mengkonstruksi model matematika sebagai berikut:

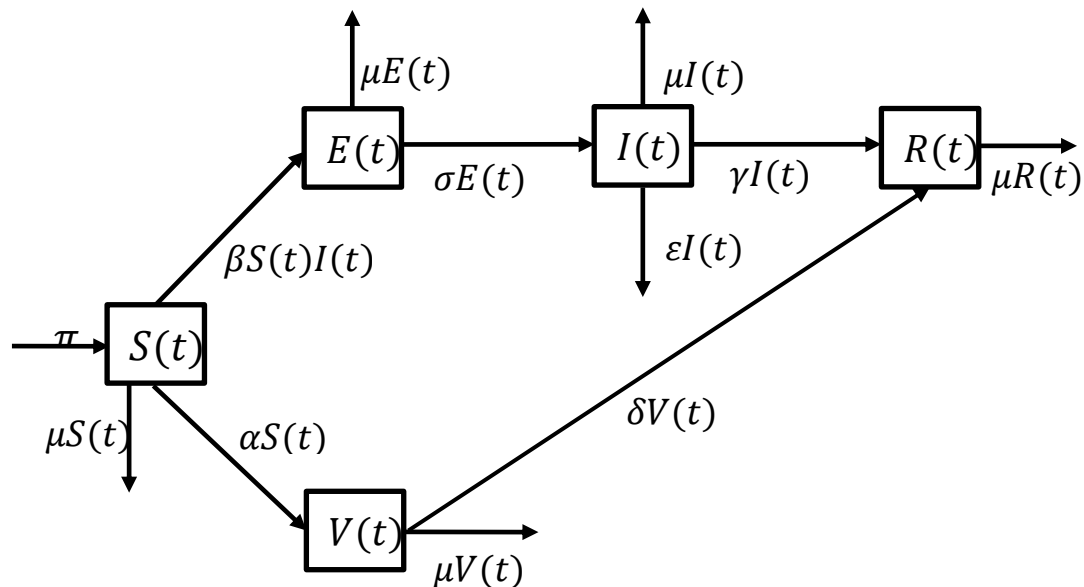
1. Setiap manusia terkategori sebagai individu yang rentan terinfeksi ISPA.
2. Pemberian vaksin hanya pada populasi yang rentan saja, dan populasi yang ter vaksin telah kebal dengan infeksi ISPA.
3. Laju infeksi penyakit ISPA dalam bentuk fungsi *bilinear*.
4. Populasi yang telah dinyatakan sembuh dari infeksi akan memiliki imunitas yang mampu melawan infeksi ISPA, sehingga tidak adanya kejadian reinfeksi.

Selanjutnya, diberikan penjelasan dari variabel dan parameter yang digunakan untuk pembentukan diagram kompartemen penyebaran penyakit ISPA.

Tabel 1. Variabel dan Parameter

Variabel atau Parameter	Interpretasi
$S(t)$	Individu yang rentan terinfeksi ISPA pada suatu waktu t
$V(t)$	Individu yang telah diberikan vaksin pada suatu waktu t
$E(t)$	Individu yang terpapar penyakit ISPA dan belum mengindikasikan adanya infeksi pada suatu waktu t
$I(t)$	Individu yang telah terinfeksi penyakit ISPA
$R(t)$	Individu yang telah dinyatakan sembuh dari penyakit ISPA
π	Laju pertambahan populasi baru
α	Laju vaksinasi yang diberikan kepada individu rentan
β	Laju terjangkitnya ISPA antara individu rentan dan individu laten
σ	Laju perpindahan dari individu laten menjadi terinfeksi
δ	Laju perpindahan dari individu ter vaksin menjadi individu dengan imunitas
γ	Laju kesembuhan
ε	Laju kematian akibat penyakit ISPA
μ	Laju kematian alami

Mengacu pada asumsi-asumsi yang telah dan deskripsi pada Tabel 1, maka diagram kompartemen model matematika penyebaran penyakit ISPA ditampilkan pada Gambar 1 berikut:



Gambar 1. Diagram Kompartemen Model Penyebaran ISPA

Berdasarkan diagram kompartemen pada Gambar 1 diperoleh model matematika dalam bentuk sistem persamaan diferensial biasa nonlinear berikut:

$$\begin{aligned}
 \frac{dS(t)}{dt} &= \pi - \beta S(t)I(t) - (\alpha + \mu)S(t) \\
 \frac{dV(t)}{dt} &= \alpha S(t) - (\delta + \mu)V(t) \\
 \frac{dE(t)}{dt} &= \beta S(t)I(t) - (\sigma + \mu)E(t) \\
 \frac{dI(t)}{dt} &= \sigma E(t) - (\varepsilon + \gamma + \mu)I(t) \\
 \frac{dR(t)}{dt} &= \gamma I(t) + \delta V(t) - \mu R(t),
 \end{aligned} \tag{1}$$

untuk mempermudah pembahasan dan penulisan, maka variabel-variabel $S(t)$, $V(t)$, $E(t)$, $I(t)$, dan $R(t)$ akan disajikan dalam bentuk S, V, E, I, R .

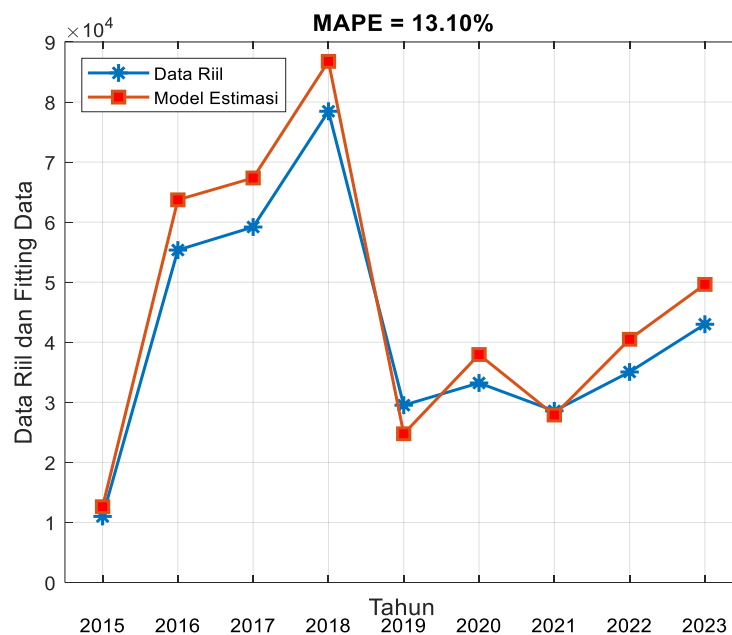
Selanjutnya, estimasi parameter untuk model (1) dilakukan dengan mengacu pada data infeksi ISPA di kota Malang sejak tahun 2015-2023 berikut:

Tabel 2. Kasus ISPA di Kota Malang

Tahun	Total Kasus ISPA (Jiwa)
2015	11.004
2016	55.351
2017	59.184

Tahun	Total Kasus ISPA (Jiwa)
2018	78.457
2019	29.526
2020	33.222
2021	28.571
2022	35.055
2023	43.000

Proses estimasi parameter menggunakan metode *lsqcurvefit* dengan nilai awal untuk laju pertumbuhan π sebesar 150 individu sebagai proses *fitting data*. Hasil *fitting data* ditampilkan pada Gambar 2 yang menunjukkan perbandingan antara *fitting data* dan data infeksi ISPA di Kota Malang. Proses *fitting data* terlihat baik dikarenakan diperoleh nilai MAPE sebesar 13,10%.



Gambar 2. Grafik Hasil *Fitting Data*

Berdasarkan pada proses *fitting data* diperoleh nilai-nilai parameter untuk model (1) yang ditampilkan pada Tabel 3, dan parameter ini yang digunakan untuk simulasi numerik.

Tabel 3. Nilai Estimasi Parameter

Parameter	Nilai Estimasi
α	0,29995
β	0,29246
σ	0,5385
δ	0,1

Parameter	Nilai Estimasi
γ	0,38132
ε	0,18552
μ	0,25283

3 Hasil dan Pembahasan

Pembahasan dan analisis model dari sistem persamaan (1) tentang penyakit ISPA terbagi menjadi beberapa bagian, yaitu analisis keterbatasan dan kepositifan solusi, kajian titik kesetimbangan, bilangan reproduksi dasar, analisis kestabilan lokal titik kesetimbangan, dan analisis kesensitivitas.

3.1 Keterbatasan dan Kepositifan Solusi

Misalkan variabel N merupakan notasi total populasi, maka $N = S + V + E + I + R$, dan berlaku sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 \frac{dN}{dt} &= \frac{dS}{dt} + \frac{dV}{dt} + \frac{dE}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} \\
 &= \pi - \beta SI - \alpha S - \mu S + \alpha S - \delta V - \mu V + \beta SI - \sigma E - \mu E + \sigma E - \varepsilon I \\
 &\quad - \gamma I - \mu I + \gamma I + \delta V - \mu R \\
 &= \pi - \varepsilon I - \mu(S + V + E + I + R) \\
 &= \pi - \varepsilon I - \mu N \\
 &\leq \pi - \mu N.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Terlihat bahwa persamaan (2) merupakan persamaan differensial biasa, dan apabila diselesaikan dengan faktor pengintegralan, maka diperoleh solusi berikut

$$N(t) \leq \frac{\pi}{\mu} + ce^{-\mu t}. \tag{3}$$

Selanjutnya, misal solusi $N(t)$ pada persamaan (3) diberikan nilai awal $t = 0$, maka diperoleh solusi khusus berbentuk

$$N(t) \leq \frac{\pi}{\mu} + \left(N(0) - \frac{\pi}{\mu}\right)e^{-\mu t}. \tag{4}$$

Akibatnya untuk $t \rightarrow \infty$ pada persamaan (4) akan berlaku $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) \leq \frac{\pi}{\mu}$. Oleh karena itu, solusi dari model penyebaran penyakit ISPA akan terbatas oleh suatu nilai $\frac{\pi}{\mu}$ pada daerah

$$\Psi = \left\{ (S, V, E, I, R) \mid N(t) \leq \frac{\pi}{\mu} \right\}. \tag{5}$$

Terorema 1. Misalkan berlaku $S(0) \geq 0, V(0) \geq 0, E(0) \geq 0, I(0) \geq 0, R(0) \geq 0$, maka semua solusi sistem persamaan (1) akan bernilai positif untuk setiap $t \geq 0$.

Bukti. Kepositifan solusi dari sistem persamaan (1) dapat dibuktikan dengan analogi pembuktian pada penelitian [18], dan ditampilkan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \left. \frac{dS}{dt} \right|_{S=0} &= \pi - \beta SI - \alpha S - \mu S = \pi > 0, & \left. \frac{dV}{dt} \right|_{V=0} &= \alpha S - \delta V - \mu V = \alpha S \geq 0 \\ \left. \frac{dE}{dt} \right|_{E=0} &= \beta SI - \sigma E - \mu E = \beta SI \geq 0, & \left. \frac{dI}{dt} \right|_{I=0} &= \sigma E - \varepsilon I - \gamma I - \mu I = \sigma E \geq 0 \\ \left. \frac{dR}{dt} \right|_{R=0} &= \gamma I + \delta V - \mu R = \gamma I + \delta V \geq 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Terlihat jelas dari persamaan (6) bahwa keseluruhan sistem memberikan hasil selalu lebih besar dari nol untuk setiap waktu, artinya semua bernilai non negatif.

3.2 Titik Keseimbangan Model

Titik keseimbangan sistem persamaan (1) diperoleh ketika sistem persamaan memenuhi kondisi $\frac{dS}{dt} = \frac{dV}{dt} = \frac{dE}{dt} = \frac{dI}{dt} = \frac{dR}{dt} = 0$. Pada analisis titik keseimbangan terbagi menjadi dua bagian, yaitu titik keseimbangan bebas penyakit dan titik keseimbangan endemik. Titik keseimbangan bebas penyakit terjadi ketika tidak adanya infeksi ISPA pada kelompok populasi, artinya $I = 0$. Apabila $I = 0$, maka titik keseimbangan bebas penyakit sistem persamaan (1) diperoleh

$$E_0(S, V, E, I, R) = \left(\frac{\pi}{\alpha + \mu}, \frac{\alpha\pi}{(\delta + \mu)(\alpha + \mu)}, 0, 0, \frac{\delta\alpha\pi}{\mu(\delta + \mu)(\alpha + \mu)} \right). \quad (7)$$

Selanjutnya mengacu titik keseimbangan pada persamaan (7) dapat ditentukan bilangan reproduksi dasar dari sistem persamaan (1). Bilangan reproduksi dasar merupakan nilai ambang batas yang dapat menunjukkan adanya infeksi atau tidak. Pada penelitian ini, bilangan reproduksi dasar ditentukan dengan metode *Next Generation Matrix* (NGM) [19], [20], dan diperoleh bilangan reproduksi dasar R_0 sebagai berikut

$$R_0 = \frac{\sigma\beta\pi}{(\sigma + \mu)(\alpha + \mu)(\varepsilon + \gamma + \mu)}. \quad (8)$$

Selain titik keseimbangan bebas penyakit, model penyebaran penyakit ISPA memiliki titik keseimbangan endemik. Titik keseimbangan endemik didapatkan ketika $I \neq 0$, artinya infeksi penyakit ISPA menyebar secara luas. Ketika $I \neq 0$, maka sistem persamaan (1) memiliki titik keseimbangan endemik berikut

$$S^* = \frac{\pi}{(R_0 - 1)(\alpha + \mu) + \alpha + \mu}, V^* = \frac{\alpha\pi}{(\delta + \mu)((R_0 - 1)(\alpha + \mu) + \alpha + \mu)},$$

$$E^* = \frac{1}{\sigma + \mu} \left(\frac{\pi(R_0 - 1)(\alpha + \mu)}{(R_0 - 1)(\alpha + \mu) + \alpha + \mu} \right), I^* = \frac{(R_0 - 1)(\alpha + \mu)}{\beta}, R^* = \frac{\gamma I^* + \delta V^*}{\mu}.$$

3.3 Analisis Kestabilan Lokal Titik Keseimbangan

Analisis kestabilan lokal model penyebaran penyakit ISPA dapat ditentukan dengan linearisasi sistem persamaan (1) dan proses ini menghasilkan matriks Jacobian. Adapun matriks Jacobian yang bersesuaian dengan sistem persamaan (1) berbentuk

$$J = \begin{bmatrix} -(\beta I + \alpha + \mu) & 0 & 0 & -\beta S & 0 \\ \alpha & -(\delta + \mu) & 0 & 0 & 0 \\ \beta I & 0 & -(\sigma + \mu) & \beta S & 0 \\ 0 & 0 & \sigma & -(\varepsilon + \gamma + \mu) & 0 \\ 0 & \delta & 0 & \gamma & -\mu \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Kestabilan lokal titik keseimbangan bebas penyakit diperoleh dengan substitusi titik tetap bebas penyakit pada matriks Jacobian (9), dan diperoleh matriks Jacobian untuk titik keseimbangan bebas penyakit berikut

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -(\alpha + \mu) & 0 & 0 & -\frac{\beta\pi}{\alpha + \mu} & 0 \\ \alpha & -(\delta + \mu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\sigma + \mu) & \frac{\beta\pi}{\alpha + \mu} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma & -(\varepsilon + \gamma + \mu) & 0 \\ 0 & \delta & 0 & \gamma & -\mu \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Langkah selanjutnya adalah menentukan nilai eigen yang bersesuaian dengan matriks Jacobian (10). Nilai eigen diperoleh dengan menyelesaikan persamaan $\det(J(E_0) - \lambda I) = 0$. Melalui kaidah ekspansi kofaktor matriks, diperoleh persamaan karakteristik yang bersesuaian berikut

$$(-(\alpha + \mu) - \lambda)(-(\delta + \mu) - \lambda)(-\mu - \lambda)(\lambda^2 + b_1\lambda + b_2), \quad (11)$$

dengan

$$b_1 = \sigma + \varepsilon + \gamma + 2\mu$$

$$b_2 = (\sigma + \mu)(\varepsilon + \gamma + \mu) - \sigma\beta\pi.$$

Berdasarkan pada persamaan karakteristik (11), diperoleh nilai-nilai eigen secara terperinci

$$\lambda_1 = -(\alpha + \mu), \quad \lambda_2 = -(\delta + \mu), \quad \lambda_3 = -\mu, \quad (12)$$

dan

$$\lambda_{4,5} = \frac{-(\sigma + \varepsilon + \gamma + 2\mu) \pm \sqrt{(\sigma + \varepsilon + \gamma + 2\mu)^2 - 4((\sigma + \mu)(\varepsilon + \gamma + \mu) - \sigma\beta\pi)}}{2}. \quad (13)$$

Apabila persamaan (13) dilakukan analisis untuk kestabilan sistem, maka nilai λ_4 dan λ_5 akan bernilai negatif ketika nilai diskrimannya $D \geq 0$, dan $(\sigma + \mu)(\varepsilon + \gamma + \mu) > \sigma\beta\pi$. Artinya kondisi ini disebut sebagai syarat kestabilan lokal untuk titik kesetimbangan bebas penyakit, yaitu

$$D \geq 0, \text{ dan } \pi < \frac{(\sigma + \mu)(\varepsilon + \gamma + \mu)}{\sigma\beta}. \quad (14)$$

Adapun kestabilan titik endemik dapat diketahui dengan beranalogi pada penentuan kestabilan titik bebas penyakit. Sehingga diperoleh matriks Jacobian yang bersesuaian dengan titik endemik, yaitu

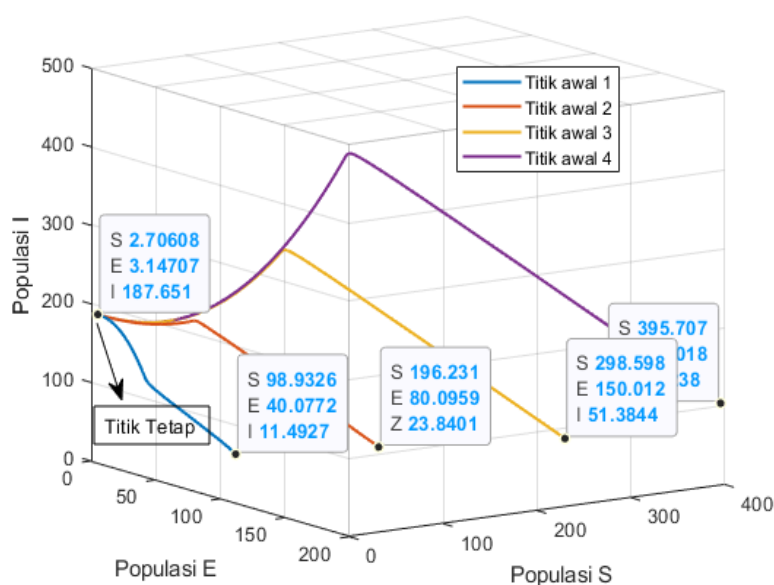
$$J(E^*) = \begin{bmatrix} -(\beta I^* + \alpha + \mu) & 0 & 0 & -\beta S^* & 0 \\ \alpha & -(\delta + \mu) & 0 & 0 & 0 \\ \beta I^* & 0 & -(\sigma + \mu) & \beta S^* & 0 \\ 0 & 0 & \sigma & -(\varepsilon + \gamma + \mu) & 0 \\ 0 & \delta & 0 & \gamma & -\mu \end{bmatrix}, \quad (15)$$

dengan

$$S^* = \frac{\pi}{(R_0 - 1)(\alpha + \mu) + \alpha + \mu},$$

$$I^* = \frac{(R_0 - 1)(\alpha + \mu)}{\beta}.$$

Berdasarkan pada matriks Jacobian (15), dan menyelesaikan persamaan $\det(J(E^*) - \lambda I) = 0$ didapatkan persamaan karakteristik yang bersesuaian dalam bentuk derajat lima. Dikarenakan berderajat lima, maka akar-akar persamaan karakteristik yang bersesuaian dengan matriks Jacobian (15) sulit ditentukan secara analitik. Oleh karena itu, proses analisis dilakukan dengan simulasi numerik pada tiga bidang fase S, E , dan I , sebagai berikut



Gambar 3. Bidang Fase Pada Populasi S, E , dan I

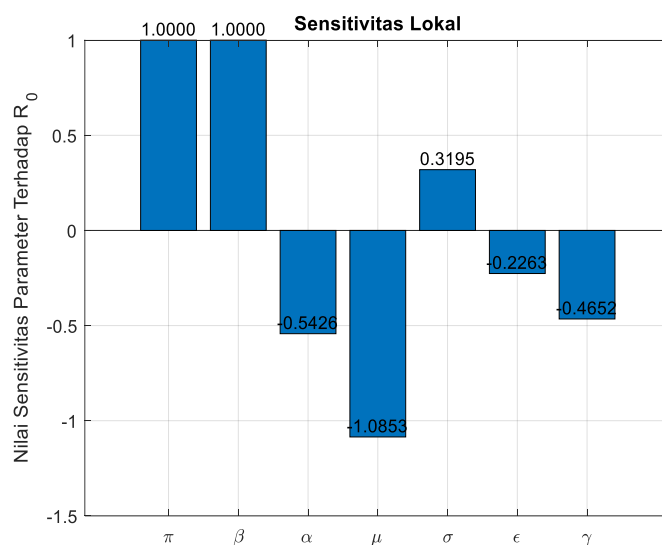
Pada Gambar 3 menampilkan bahwa hasil simulasi pada tiga bidang fase dengan beberapa nilai awal yang berbeda menuju titik kesetimbangan yaitu $E^*(S^*, E^*, I^*) = (2,706; 3,147; 187,651;)$, dan nilai $R_0 = 8,117$. Artinya, simulasi ini menunjukkan bahwa solusi akan konvergen menuju titik kesetimbangan endemik, sehingga titik kesetimbangan endemik bersifat stabil asimtotik.

3.4 Analisis Sensitivitas Parameter

Analisis sensitivitas parameter dikaji untuk melihat seberapa besar pengaruhnya parameter terhadap suatu model yang dianalisis [19]. Indeks sensitivitas parameter terhadap bilangan reproduksi dasar dapat dicari dengan

$$C_{\rho}^{R_0} = \frac{\partial R_0}{\partial \rho} \left(\frac{\rho}{R_0} \right), \quad (16)$$

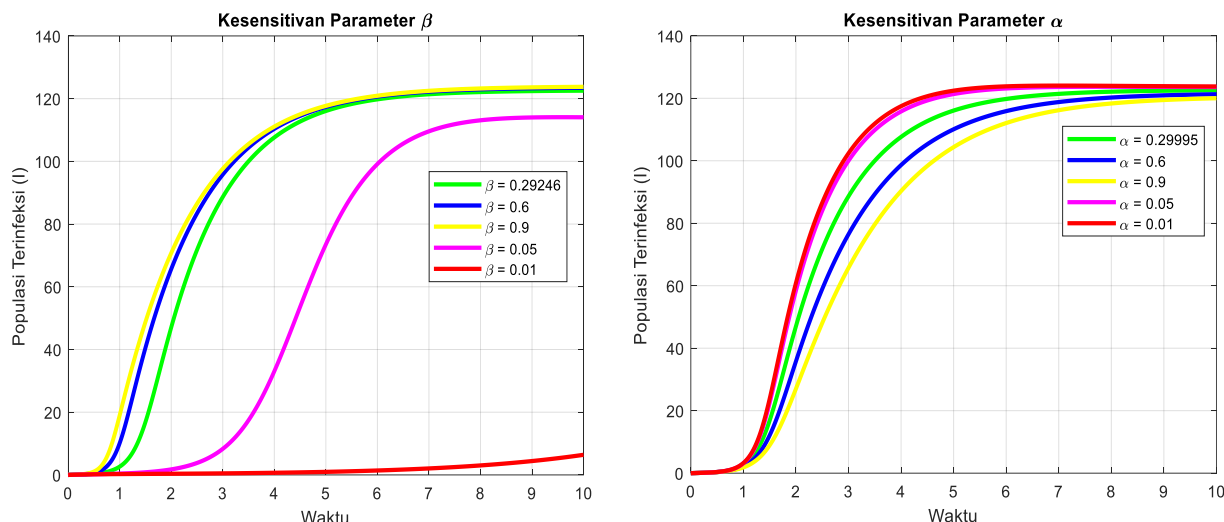
Pada persamaan (16) notasi ρ merupakan parameter yang terlibat pada bilangan reproduksi dasar, dan persamaan bilangan reproduksi dasar mengacu pada persamaan (8). Selanjutnya dilakukan evaluasi dengan rumus pada persamaan (16), dan mengacu nilai-nilai pada Tabel 3 diperoleh nilai indeks sensitivitas parameter terhadap R_0 untuk kasus model penyebaran penyakit ISPA. Indeks sensitivitas ditampilkan dalam bentuk grafik bar yang disajikan pada Gambar 4.



Gambar 4. Indeks Sensitivitas Parameter

Berdasarkan pada Gambar 4 terlihat bahwa indeks sensitivitas yang paling positif adalah π dan β , sedangkan yang paling negatif adalah μ , dan diikuti oleh parameter α . Pada kasus indeks sensitivitas positif memberikan makna bahwa ketika dilakukan pengurangan nilai parameternya, maka nilai bilangan reproduksi dasar akan ikut berkurang, atau sebaliknya. Sedangkan indeks sensitivitas negatif berlaku sebaliknya, yaitu ketika diturunkan nilai parameternya, maka nilai bilangan reproduksi dasar akan bertambah, atau sebaliknya. Misalnya, mengacu pada indeks sensitivitas untuk parameter β , ketika nilai parameter β diturunkan, maka diikuti oleh penurunan

nilai R_0 . Jika nilai R_0 turun, artinya populasi yang terinfeksi (I) juga akan berkurang, dan akibatnya tidak terjadi endemik. Selanjutnya, jika dipandang indeks sensitivitas dari parameter α , maka akan dapat diinterpretasikan bahwa meskipun nilai diturunkan ataupun dinaikkan maka tidak terlalu signifikan mempengaruhi populasi terinfeksi. Sebagai ilustrasi pengaruhnya parameter β dan α dapat dilihat pada Gambar 5.



Gambar 5. Kesensitivitas Parameter β dan α terhadap perilaku solusi populasi terinfeksi

4 Masalah Kontrol Optimal

Analisis kontrol optimal diterapkan sebagai langkah pengendalian penyebaran penyakit ISPA. Masalah kontrol optimal yang dikonstruksi terhadap model (1) bertujuan untuk meminimumkan populasi laten dan meminimumkan populasi terinfeksi. Besar harapannya ketika populasi laten dan terinfeksi minimum, maka tidak akan terjadi endemik. Dilain sisi, kontrol optimal ini bertujuan memaksimalkan populasi tervaksin dan populasi yang sembuh. Selanjutnya, berdasarkan pada hubungan antara biaya edukasi dan biaya pengobatan dengan jumlah individu yang laten dan terinfeksi berbentuk tidak linear, maka dipilih fungsi kuadratik untuk meminimumkan populasi laten dan terinfeksi, sehingga fungsi tujuan dibentuk dalam fungsi *Lagrange* dengan asumsi tanpa adanya biaya di akhir waktu.

$$\text{Min } J(u_1, u_2) = \int_{t_0}^{t_f} (E(t) + I(t) - V(t) - R(t) + Au_1^2(t) + Bu_2^2(t))dt, \quad (17)$$

dengan variabel kontrol terletak pada interval $0 \leq u_1(t) \leq 1$, $0 \leq u_2(t) \leq 1$, dan $t_0 \leq t \leq t_f$, serta bobot A, B selalu bernilai positif. Selanjutnya, variabel kontrol yang diperkenalkan digunakan dalam masalah kontrol optimal, yaitu variabel $u_1(t)$ yang merepresentasikan tentang usaha edukasi dengan terfokus pada interaksi antara individu rentan dan individu terinfeksi. Variabel

kontrol $u_2(t)$ merepresentasikan usaha pengobatan secara intensif terhadap individu yang telah terinfeksi ISPA. Oleh karena itu, formulasi masalah kontrol optimal dapat dibangun mellaui persamaan (1) dengan menambahkan variabel kontrol $u_1(t)$ dan $u_2(t)$, diperoleh sistem persamaan dengan variabel kontrol sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 \frac{dS(t)}{dt} &= \pi - (1 - u_1(t))\beta S(t)I(t) - (\alpha + \mu)S(t) \\
 \frac{dV(t)}{dt} &= \alpha S(t) - (\delta + \mu)V(t) \\
 \frac{dE(t)}{dt} &= (1 - u_1(t))\beta S(t)I(t) - (\sigma + \mu)E(t) \\
 \frac{dI(t)}{dt} &= \sigma E(t) - (\varepsilon + \gamma + \mu)I(t) - u_2 I(t) \\
 \frac{dR(t)}{dt} &= \gamma I(t) + \delta V(t) - \mu R(t) + u_2 I(t)
 \end{aligned} \tag{18}$$

Adapun langkah penyelesaian dan analisis masalah kontrol optimal dari sistem persamaan (17) dan (18) dapat diselesaikan dengan prinsip minimum Pontryagin. Langkah awal dalam prinsip Pontryagin dengan membentuk fungsi Hamiltonian yang bersesuaian dengan persamaan (17) dan (18). Fungsi Hamiltonial diformulasikan dengan bentuk

$$\begin{aligned}
 H = & E(t) + I(t) - V(t) - R(t) + Au_1^2(t) + Bu_2^2(t) \\
 & + \psi_S \left(\pi - (1 - u_1(t))\beta S(t)I(t) - (\alpha + \mu)S(t) \right) \\
 & + \psi_V (\alpha S(t) - (\delta + \mu)V(t)) \\
 & + \psi_E \left((1 - u_1(t))\beta S(t)I(t) - (\sigma + \mu)E(t) \right) \\
 & + \psi_I (\sigma E(t) - (\varepsilon + \gamma + \mu)I(t) - u_2 I(t)) \\
 & + \psi_R (\gamma I(t) + \delta V(t) - \mu R(t) + u_2 I(t)),
 \end{aligned} \tag{19}$$

dengan variabel $\psi_i, i = S, V, E, I, R$ disebut variabel-variabel adjoint (*costate*).

Berdasarkan pada prinsip Pontryagin, fungsi Hamiltonian (19) yang telah dibentuk agar optimal harus memenuhi kondisi stasioner, kondisi *state*, dan kondisi *costate*.

4.1 Kondisi Stasioner

Kondisi stasioner dapat diperoleh dengan menurunkan fungsi Hamiltonian secara parsial terhadap variabel $u_1(t)$ dan $u_2(t)$, dan memenuhi $\frac{\partial H}{\partial u_i} = 0$. Diferensiasi fungsi Hamiltonian terhadap u_1 diperlihatkan

$$\frac{\partial H}{\partial u_1} = 2Au_1 + \psi_S(\beta S(t)I(t)) - \psi_E(\beta S(t)I(t)) = 0,$$

sehingga diperoleh kondisi stasioner

$$u_1(t) = \frac{\beta S(t)I(t)(\psi_E - \psi_S)}{2A}.$$

Adapun diferensiasi terhadap u_2 ditunjukkan

$$\frac{\partial H}{\partial u_2} = 2Bu_2 - \psi_I I(t) + \psi_R I(t) = 0,$$

diperoleh

$$u_2(t) = \frac{I(t)(\psi_I - \psi_R)}{2B}.$$

Dikarenakan variabel-variabel kontrol berada pada interval $[0,1]$, maka berlaku kondisi optimal untuk variabel kontrol berikut

$$u_1^*(t) = \min \left\{ \max \left(0, \frac{\beta S(t)I(t)(\psi_E - \psi_S)}{2A} \right), 1 \right\}$$

$$u_2^*(t) = \min \left\{ \max \left(0, \frac{I(t)(\psi_I - \psi_R)}{2B} \right), 1 \right\}.$$

4.2 Kondisi State

Kondisi *state* merupakan kondisi kendala yang akan terlibat pada suatu masalah kontrol optimal. Kendala yang terdapat pada penelitian ini merupakan sistem (9) dengan kondisi awal $S(0) = S_0, V(0) = V_0, E(0) = E_0, I(0) = I_0$, dan $R(0) = R_0$.

4.3 Kondisi Costate

Kondisi *costate* dapat diperoleh ketika fungsi Hamiltonian diturunkan terhadap variabel-variabel *state* dan kemudian dikalikan dengan negatif satu, ditunjukkan sebagai berikut:

$$\frac{d\psi_S}{dt} = -\frac{dH}{dS} = -\left\{ \psi_S \left(-(1 - u_1(t))\beta I - (\alpha + \mu) \right) + \psi_V(\alpha) + \psi_E \left((1 - u_1(t))\beta I \right) \right\}$$

$$\frac{d\psi_V}{dt} = -\frac{dH}{dV} = -\left\{ -1 + \psi_V(-(\delta + \mu)) + \psi_R(\delta) \right\}$$

$$\frac{d\psi_E}{dt} = -\frac{dH}{dE} = -\left\{ 1 + \psi_E(-(\sigma + \mu)) + \psi_I(\sigma) \right\}$$

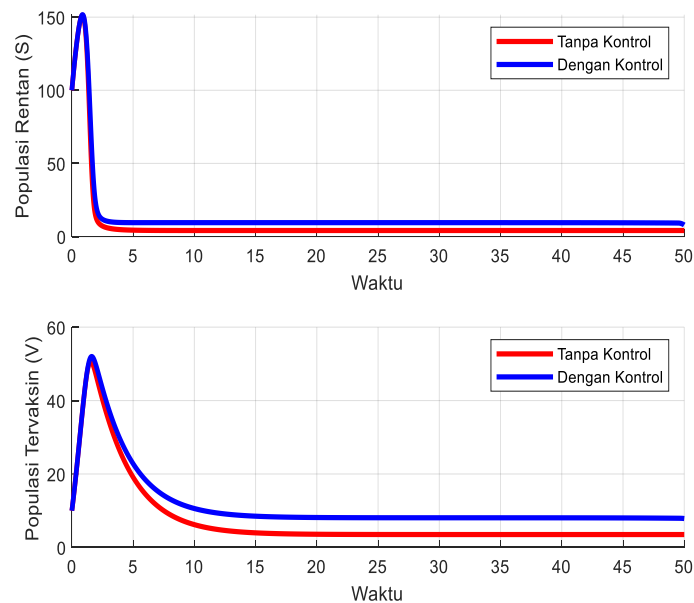
$$\begin{aligned} \frac{d\psi_I}{dt} = -\frac{dH}{dI} = & -\left\{ 1 + \psi_S(-(1 - u_1(t))\beta S) + \psi_E((1 - u_1(t))\beta S) \right. \\ & \left. + \psi_I(-(\varepsilon + \gamma + \mu + u_2)) + \psi_R(\gamma + u_2(t)) \right\} \end{aligned}$$

$$\frac{d\psi_R}{dt} = -\frac{dH}{dR} = -\left\{ -1 + \psi_R(-\mu) \right\},$$

dengan kondisi transversal $\psi_S(T) = \psi_V(T) = \psi_E(T) = \psi_I(T) = \psi_R(T) = 0$.

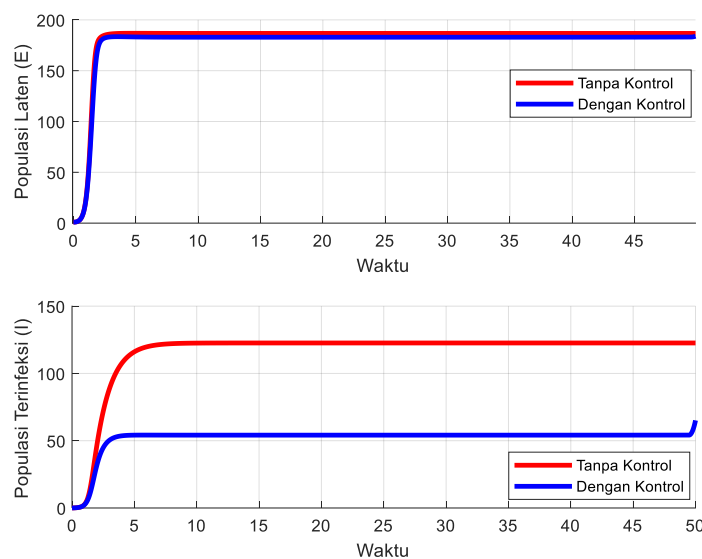
5 Simulasi Numerik Masalah Kontrol Optimal

Simulasi numerik ditampilkan sebagai pendukung dari hasil analisis yang telah dikerjakan. Penyelesaian numerik dikerjakan dengan metode *Sweep* Maju-Mundur, dan berbantuan *software* MATLAB. Pada simulasi numerik digunakan parameter pada Tabel 3, dengan nilai awal $S(0) = 100$, $V(0) = 10$, $E(0) = 1$, $I(0) = R(0) = 0$, dan nilai bobot $A = 0,05$, dan $B = 0,075$. Hasil simulasi menampilkan perjalanan solusi tanpa dan dengan kontrol sebagai berikut



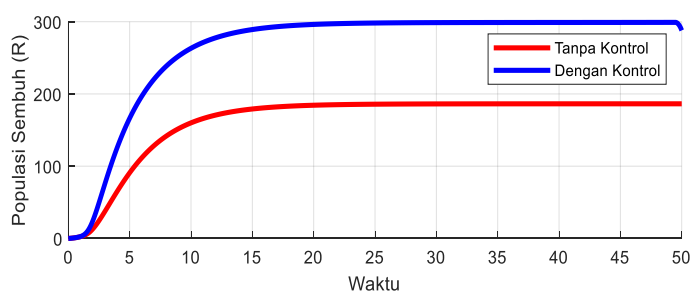
Gambar 6. Perbandingan Simulasi Tanpa dan Dengan Kontrol Populasi Rentan dan Tervaksin

Grafik pada Gambar 6 merepresentasikan perjalanan populasi dengan dan tanpa penerapan kontrol. Dinamika solusi populasi rentan (S) tanpa kontrol digambarkan dengan garis merah. Populasi rentan mengalami penurunan signifikan mulai awal waktu dan mencapai kestabilan dengan posisi yang sangat rendah dalam waktu singkat. Sebaliknya, dinamika solusi dengan kontrol digambarkan dengan garis biru, penurunan populasi terjadi lebih lambat serta kestabilannya lebih tinggi dibandingkan dengan populasi rentan tanpa kontrol. Grafik kedua dari Gambar 6 merepresentasikan perjalanan solusi populasi tervaksin (V). Simulasi tanpa kontrol menunjukkan peningkatan secara cepat di awal waktu hingga mencapai puncak tertinggi, kemudian diikuti penurunan secara perlahan hingga stabil. Sedangkan perjalanan solusi dengan kontrol, perubahan populasi tervaksin mencapai puncak dan stabilnya berada di atas solusi tanpa kontrol. Berdasarkan simulasi terlihat bahwa dengan kontrol pengendalian interaksi antara individu rentan dan individu terinfeksi dapat mempertahankan jumlah populasi rentan meskipun tidak signifikan.



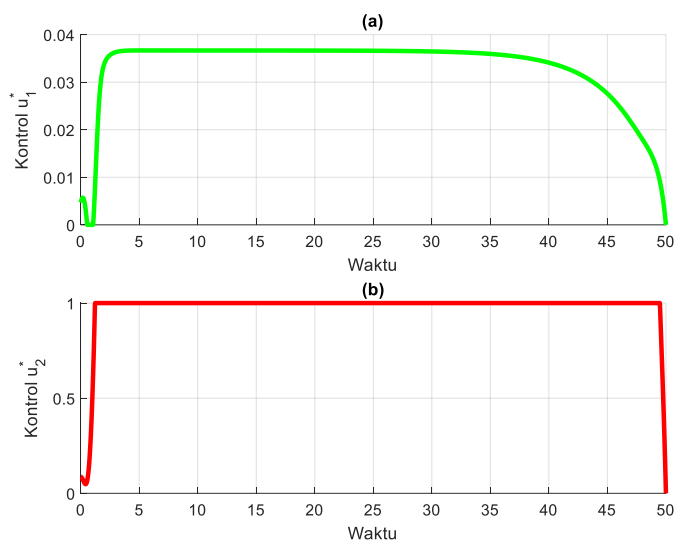
Gambar 7. Perbandingan Simulasi Tanpa dan Dengan Kontrol Populasi Laten dan Terinfeksi

Gambar 7 menampilkan perjalanan solusi populasi laten dan populasi terinfeksi. Berdasarkan grafik terlihat menampilkan dua skenario, yaitu simulasi tanpa dan dengan kontrol terhadap populasi laten (E) dan terinfeksi (I). Populasi laten tanpa kontrol ditunjukkan dengan grafik warna merah, terlihat bahwa perjalanan populasi laten meningkat tajam dari awal waktu hingga stabil dari waktu ke-5 hingga akhir simulasi mencapai angka sekitar 200. Begitu juga, simulasi dengan kontrol menunjukkan populasi laten meningkat mulai dari awal waktu, dan terlihat grafik dengan kontrol lebih rendah dibandingkan tanpa kontrol. Hal ini merepresentasikan bahwa efek pembatasan populasi tidak signifikan pengaruh terhadap populasi laten. Adapun grafik yang bawah merepresentasikan populasi terinfeksi tanpa kontrol, dan menunjukkan adanya peningkatan sangat signifikan dari permulaan waktu simulasi hingga akhir waktu simulasi, dan konvergen di angka sekitar 125. Sedangkan simulasi dengan kontrol menampilkan bahwa populasi terinfeksi meningkat di awal waktu, dan konvergen pada angka yang jauh lebih rendah dibandingkan dengan nilai konvergensi tanpa kontrol. Hal ini memperlihatkan bahwa peningkatan pengobatan memberikan pengaruh signifikan dalam mengendalikan populasi terinfeksi.



Gambar 8. Perbandingan Simulasi Tanpa dan Dengan Kontrol Populasi Sembuh

Pada Gambar 8 menampilkan hasil simulasi yang merepresentasikan dinamika populasi sembuh setelah diberikan kontrol meningkat jauh dibandingkan tanpa kontrol. Artinya, skenario kontrol yang diberikan pada model matematika mampu meningkatkan populasi yang sembuh, dan efektivitas kontrol pemulihan populasi yang terinfeksi berjalan dengan baik.



Gambar 9. Simulasi Profile Kontrol $u_1(t)$ dan $u_2(t)$

Grafik pada Gambar 9 menunjukkan perjalanan dari profile kontrol u_1 dan u_2 terhadap waktu. Simulasi bagian (a) menunjukkan bahwa proses kontrol u_1 diawal waktu sedikit usaha yang dilakukan kemudian meningkat hingga waktu ke-35, hingga akhirnya menurun secara perlahan hingga di akhir simulasi. Adapun kontrol u_2 , terlihat dominan mulai diawal waktu hingga akhir waktu ke-50. Artinya bahwa dominasi kontrol u_2 dapat diterapkan dalam penanganan penyebaran ISPA, dikarenakan kontrol pengobatan terlihat intensif dan cenderung lebih cepat dalam penurunan jumlah populasi yang terinfeksi dan meningkatkan laju kesembuhan. Hal ini menunjukkan bahwa usaha pengobatan lebih baik secara simulasi dibandingkan dengan usaha pembatasan interaksi individu rentan dengan individu terinfeksi.

6 Simpulan

Pada penelitian ini menghasilkan model penyebaran ISPA dengan mempertimbangkan adanya proses vaksinasi. Analisis dinamik menunjukkan bahwa model *SVEIR* memiliki dua titik kesetimbangan, yaitu titik bebas penyakit yang bersifat stabil lokal dengan syarat $D \geq 0$, dan $\pi < \frac{(\sigma+\mu)(\varepsilon+\gamma+\mu)}{\sigma\beta}$. Titik tetap endemik bersifat stabil asimtotik berdasarkan pada simulasi pada tiga bidang fase *SEI*, dan berdasarkan simulasi diperoleh nilai bilangan reproduksi dasar $R_0 = 8,117$. Analisis sensitivitas menunjukkan bahwa indeks sensitivitas yang paling positif terhadap bilangan R_0 adalah parameter π dan β . Selanjutnya, penelitian ini menghasilkan analisis

masalah kontrol optimal dengan dua variabel kontrol, yaitu kontrol berupa usaha pembatasan interaksi individu rentan dan individu terinfeksi, serta kontrol berupa upaya pengobatan intensif terhadap populasi terinfeksi. Berdasarkan pada analisis dan simulasi numerik yang dilakukan telah sesuai dengan formula fungsi tujuan yang dibentuk. Hal ini menginterpretasikan bahwa pengobatan secara intensif lebih berpengaruh dibandingkan dengan usaha pembatasan interaksi antara individu rentan dan individu terinfeksi. Model matematika yang telah dikaji dapat diperluas dengan mempertimbangkan efek tersaturasi pada kejadian infeksi penyakit ISPA, atau dapat dikembangkan dengan penambahan efek gangguan (*noise*) melalui pendekatan persamaan diferensial stokastik.

7 Ucapan Terima Kasih

Terima kasih yang luar biasa kami sampaikan kepada Lembaga Penelitian dan Pengabdian (LPPM) Institut Teknologi dan Bisnis Asia Malang yang telah mendukung dalam pelaksanaan Hibah Penelitian Internal.

8 Daftar Pustaka

- [1] D. Leris dan M. Rosha, “Model Matematika Penyebaran Penyakit Infeksi Saluran Pernapasan Akut (ISPA) Berdasarkan Lokasi Anatomi Akibat Bakteri *Streptococcus Pneumoniae*,” *J. Math. UNP*, vol. 8, no. 2, hal. 31, 2023, doi: 10.24036/unpjomath.v8i2.14330.
- [2] Nurfadilah, Fardinah, dan Hikmah, “Analisis Model Matematika Penyebaran Penyakit ISPA,” *J. Math. Theory Appl.*, vol. 3, no. 1, hal. 212–229, 2021.
- [3] Dinkes Kota Malang, *Profil Kesehatan Kota Malang Tahun 2023*. 2023.
- [4] S. C. Mpeshe dan N. Nyerere, “Modeling the Dynamics of Coronavirus Disease Pandemic Coupled with Fear Epidemics,” *Comput. Math. Methods Med.*, vol. 2021, 2021, doi: 10.1155/2021/6647425.
- [5] Z. Ma, J. Li, J. Li, wendi Wang, Z. Jin, dan Y. Zhou, *Dynamical Modeling and Analysis of Epidemics*. World Scientific publishing Co. Pte. Ltd., 2009.
- [6] S. B. Minucci, R. L. Heise, dan A. M. Reynolds, “Review of Mathematical Modeling of the Inflammatory Response in Lung Infections and Injuries,” *Front. Appl. Math. Stat.*, vol. 6, no. August, hal. 1–25, 2020, doi: 10.3389/fams.2020.00036.
- [7] P. Kumar *dkk.*, “Effect of acute respiratory infections in infancy on pulmonary function test at 3 years of age: A prospective birth cohort study,” *BMJ Open Respir. Res.*, vol. 7, no. 1,

-
- hal. 1–10, 2020, doi: 10.1136/bmjresp-2019-000436.
- [8] R. Sungchait, I. M. Tang, dan P. Pongsumpun, “Mathematical Modeling: Global Stability Analysis of Super Spreading Transmission of Respiratory Syncytial Virus (RSV) Disease,” *Computation*, vol. 10, no. 7, 2022, doi: 10.3390/computation10070120.
- [9] E. Arguni dkk., “Co-infection of SARS-CoV-2 with other viral respiratory pathogens in Yogyakarta, Indonesia: A cross-sectional study,” *Ann. Med. Surg.*, vol. 77, no. April, hal. 103676, 2022, doi: 10.1016/j.amsu.2022.103676.
- [10] R. Mirino, D. Dary, dan R. Rifatolistia, “Identification of Factors Causing Acute Respiratory Infection (ARI) of Under-Fives in Community Health Center Work Area in North Jayapura Sub-District,” *J. Trop. Pharm. Chem.*, vol. 6, no. 1, hal. 15–20, 2022, doi: 10.25026/jtpc.v6i1.271.
- [11] L. Hakim, T. Trisilowati, dan I. Darti, “Optimal Control of a Cholera Disease Model with Vaccination,” *Int. J. Appl. Math. Stat.*, vol. 53, no. 4, hal. 65–72, 2015.
- [12] P. Yosyingyong dan R. Viriyapong, “Global stability and optimal control for a hepatitis B virus infection model with immune response and drug therapy,” *J. Appl. Math. Comput.*, vol. 60, no. 1–2, hal. 537–565, 2019, doi: 10.1007/s12190-018-01226-x.
- [13] K. T. Kristanti, T. Trisilowati, dan A. Widodo, “Optimal Control of Cervical Cancer Model with Vaccination and Screening,” *J. Exp. Life Sci.*, vol. 10, no. 2, hal. 72–78, 2020, doi: 10.21776/ub.jels.2020.010.02.01.
- [14] Fatmawati, F. F. Herdicho, Windarto, W. Chukwu, dan H. Tasman, “An optimal control of malaria transmission model with mosquito seasonal factor,” *Results Phys.*, vol. 25, 2021, doi: 10.1016/j.rinp.2021.104238.
- [15] R. Seck, D. Ngom, B. Ivorra, dan Á. M. Ramos, “An Optimal Control Model to Design Strategies for Reducing the Spread of the Ebola Virus Disease,” *Math. Biosci. Eng.*, vol. 19, no. 2, hal. 1746–1774, 2022, doi: 10.3934/mbe.2022082.
- [16] L. Hakim, “Multiple Strategis as Optimal control of a Covid-19 Disease With Quarantine and Using Health Masks,” *Barekeng J. Imu Mat. dan Terap.*, vol. 16, no. 3, hal. 1059–1068, 2022, doi: <https://doi.org/10.30598/barekengvol16iss3pp1059-1068>.
- [17] L. Hakim, “A Pontryagin Principle and Optimal Control of Spreading Covid-19 With Vaccination and Quarantine Subtype,” *Commun. Math. Biol. Neurosci.*, vol. 2023, hal. 1–28, 2023, doi: 10.28919/cmbn/8157.
- [18] L. Hakim dan L. Widayanti, “BOUNDEDNESS AND EXISTENCE ANALYSIS SOLUTION OF AN OPTIMAL CONTROL PROBLEMS ON MATHEMATICAL COVID-19 MODEL,” *Barekeng J. Imu Mat. dan Terap.*, vol. 18, no. 2, hal. 797–808, 2024.

- [19] L. Perko, *Equations and Dynamical Systems*. 2001.
- [20] L. Hakim dan I. Rodliyah, “MATHEMATICAL STOCHASTICS MODEL OF TUBERCULOSIS USING EMPIRICAL DATA FROM MALANG CITY,” *Commun. Math. Biol. Neurosci.*, vol. 2023, no. 133, hal. 1–24, 2024.