

Pengaruh Reaksi Difusi-Adveksi pada Sistem Pemangsa-Mangsa

Maulana Fari Asrafi^{1*}, Sutrima Sutrima²

^{1,2}Mathematics Department, Faculty of Mathematics and Natural Sciences,
Sebelas Maret University, Jalan Ir. Sutami No. 36A, Kentingan, Jebres, Surakarta 57126, Indonesia
^{1,2}Program Studi Matematika Universitas Sebelas Maret
e-mail:maulana.fari_934@student.uns.ac.id

Diajukan: 22 Mei 2025, Diperbaiki: 12 Maret 2026, Diterima: 4 April 2026

Abstrak

Sistem mangsa-pemangsa merupakan model dinamika interaksi antarspesies yang secara alami dipengaruhi oleh faktor lingkungan seperti difusi dan adveksi. Dalam konteks ekologi, difusi merepresentasikan penyebaran populasi akibat pergerakan acak dari konsentrasi tinggi ke rendah, sementara adveksi memodelkan pengaruh aliran eksternal terarah seperti arus sungai atau angin. Penelitian ini bertujuan mengkaji pengaruh kombinasi kedua reaksi tersebut terhadap kestabilan titik kesetimbangan sistem melalui analisis teoritis dan studi literatur. Hasil penelitian menunjukkan bahwa kehadiran difusi-adveksi mengubah syarat kestabilan secara signifikan, khususnya pada titik kesetimbangan E_2 dan E_4 . Analisis bifurkasi mengungkap terjadinya ketakstabilan Turing dan bifurkasi Hopf pada nilai parameter tertentu. Secara biologis, fenomena ini mengindikasikan bahwa gangguan aliran lingkungan dapat memicu pembentukan pola persebaran populasi yang tidak merata (heterogenitas spasial) serta fluktuasi populasi yang berosilasi seiring waktu. Temuan ini menegaskan bahwa interaksi predasi sangat sensitif terhadap parameter fisik lingkungan yang melampaui sekadar interaksi biologis murni.

Kata Kunci: Sistem pemangsa-mangsa, reaksi difusi-adveksi, sistem dinamik.

Abstract

The predator-prey system is a model of interspecies interaction dynamics that is naturally influenced by environmental factors such as diffusion and advection. In the context of ecology, diffusion represents the spread of populations due to random movement from high to low concentrations, while advection models the influence of directed external flows such as river currents or wind. This study aims to examine the effect of the combination of these two reactions on the stability of the equilibrium point of the system through theoretical analysis and literature review. The results show that the presence of diffusion-advection significantly changes the stability conditions, particularly at equilibrium points E_2 and E_4 . Bifurcation analysis reveals the occurrence of Turing instability and Hopf bifurcation at certain parameter values. Biologically, this phenomenon indicates that disturbances in environmental flows can trigger the formation of uneven population distribution patterns (spatial heterogeneity) and population fluctuations that oscillate over time. This finding confirms that predatory interactions are highly sensitive to physical environmental parameters that go beyond purely biological interactions.

Keywords: predator-prey system, reaction-diffusion-advection, dynamics system.

1 Pendahuluan

Sistem mangsa-pemangsa berasal dari sistem Lotka-Volterra yang diusulkan oleh [1] dan [2]. Sistem mangsa-pemangsa memodelkan interaksi yang terjadi antara mangsa dan pemangsa

dalam suatu lingkungan. Sistem mangsa-pemangsa adalah sistem persamaan diferensial. Edelstein dan Keshet [3] menyebutkan bahwa untuk menentukan titik ekuilibrium pada model Lotka-Volterra, kita perlu menentukan nilai x dan y yang membuat laju populasi bernilai nol pada sistem tersebut. Beberapa penelitian mengenai sistem mangsa-pemangsa dengan fokus yang berbeda-beda telah dilakukan oleh [4], [5], [6], [7]. Li et al. [8] juga menjelaskan hal yang sama dalam menentukan titik ekuilibrium dari model predator-prey. Chen et al. [9] menganalisis sistem mangsa-pemangsa sehubungan dengan reaksi difusi yang tertunda dan ketakutan. Reaksi difusi adalah peristiwa di mana suatu zat menyebar dari area dengan konsentrasi tinggi ke area dengan konsentrasi rendah. Dalam konteks sistem mangsa-pemangsa, reaksi difusi dapat dinyatakan sebagai peristiwa penyebaran populasi pemangsa dan mangsa yang mempengaruhi dinamika sistem mangsa-pemangsa. Analisis pengaruh reaksi difusi pada sistem mangsa-pemangsa juga dilakukan pada penelitian [10], [11], [12], [13], [14]. Zhang dan Zhao [15] telah menyelidiki percabangan dan pemanenan optimal dari sistem pemangsa-mangsa yang berdifusi dengan parameter biologis penundaan dan interval. Dalam penelitian Sutrima [14], sistem mangsa-pemangsa diamati setelah reaksi difusi dengan koefisien fungsi yang bergantung pada waktu, yaitu $k(t)$.

Reaksi adveksi dalam konteks mangsa-pemangsa adalah fenomena di mana terdapat aliran yang mempengaruhi interaksi antara mangsa dan pemangsa. Contoh reaksi adveksi adalah aliran sungai dan arah angin yang menyebabkan perubahan interaksi mangsa dan pemangsa. Reaksi difusi-adveksi banyak dipelajari oleh [16], [17], [18], [19], [20]. Chen et al [18] menjelaskan pengaruh reaksi adveksi-difusi pada dua spesies yang bersaing. Bagaimana jika dua spesies tidak saling bersaing tetapi saling mendahului? Tentunya ada perbedaan efek reaksi difusi adveksi antara perilaku kompetisi dan predasi.

2 Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan studi literatur sebagai metode penelitian dalam mengkaji penelitian-penelitian terdahulu seperti artikel-artikel dalam jurnal yang berkaitan dengan sistem predator-prey dan analisis kestabilan sistem persamaan diferensial parsial. Metode analisis linear digunakan dalam menyelidiki pengaruh reaksi difusi-adveksi pada sistem. Sistem mangsa-pemangsa dengan reaksi adveksi-difusi diberikan sebagai

$$u_t = d_1 u_{xx} + a_1 u_x + u(1 - u) - \frac{\alpha uv^2}{uv+1}, (x, t) \in (0, l) \times (0, \infty), \quad (1)$$

$$v_t = d_2 v_{xx} + a_2 v_x - \gamma v + \frac{\beta uv^2}{uv+1}, (x, t) \in (0, l) \times (0, \infty), \quad (2)$$

dengan α , β , dan γ adalah konstanta positif, a_1 dan a_2 merupakan koefisien adveksi, serta d_1 dan d_2 merupakan koefisien difusi. Kondisi batas Neumann dapat merepresentasikan situasi di mana populasi tidak dapat secara bebas bertukar individu dengan lingkungan eksternal. Oleh karena itu, sistem (1)-(2) harus memenuhi syarat batas Neumann. Sistem yang diformulasikan sebagai berikut

$$u_t = d_1 u_{xx} + a_1 u_x + u(1-u) - \frac{\alpha uv^2}{uv+1}, (x, t) \in (0, l) \times (0, \infty), \quad (3)$$

$$v_t = d_2 v_{xx} + a_2 v_x - \gamma v + \frac{\beta uv^2}{uv+1}, (x, t) \in (0, l) \times (0, \infty), \quad (4)$$

$$u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0, v_x(0, t) = v_x(l, t) = 0, t > 0, \quad (5)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), v(x, 0) = v_0(x), x \in \Omega. \quad (6)$$

3 Hasil dan Pembahasan

Seperti yang dilakukan oleh Ryu [21], titik kesetimbangan sistem (3)-(6) dapat ditentukan dengan menyelesaikan sistem $f(u, v) = u(1-u) - \frac{\alpha uv^2}{uv+1} = 0$ dan $g(u, v) = -\gamma v + \frac{\beta uv^2}{uv+1} = 0$.

Teorema 1. Sistem (3)-(6) memiliki titik kesetimbangan:

- i. Titik kepunahan pemangsa dan mangsa $E_1(0,0)$,
- ii. Titik kepunahan pemangsa $E_2(1,0)$,
- iii. Titik yang memungkinkan ketahanan mangsa dan pemangsa $E_3(\frac{2}{3}, \frac{3\gamma}{2(\beta-\gamma)})$ jika dan hanya jika $\alpha = \frac{4\beta(\beta-\gamma)}{27\gamma^2}$,
- iv. Dua titik yang memungkinkan ketahanan mangsa dan pemangsa $E_4(u_1, v_1)$ and $E_5(u_2, v_2)$ that satisfies (3)-(6) dan $u_1 < \frac{2}{3} < u_2$ if $\alpha < \alpha_{bt} = \frac{4\beta(\beta-\gamma)}{27\gamma^2}$ and $\beta > \gamma$,

dengan $u_1 < \frac{2}{3} < u_2$ merupakan Solusi dari polinomial $u^3 - u^2 + \frac{\alpha\gamma^2}{\beta(\beta-\gamma)} = 0$ dan $v_i = \frac{\gamma}{u_i(\beta-\gamma)}$ untuk $i = 1, 2$.

Bukti. Titik kesetimbangan sistem (3)-(6) dapat ditentukan dengan menyelesaikan

$$f(u, v) \equiv u(1-u) - \frac{\alpha uv^2}{uv+1} = 0, \quad (7)$$

$$g(u, v) \equiv -\gamma v + \frac{\beta uv^2}{uv+1} = 0. \quad (8)$$

Dengan menyelesaikan sistem (7)-(8) diperoleh $u = 0$, $v_1 = 0$, $v_2 = \frac{u\beta(1-u)}{\alpha\gamma}$, dan $v_3 = \frac{\gamma}{u(\beta-\gamma)}$.

Substitusi $u = 0$ ke persamaan (8) diperoleh $v = 0$ sehingga diperoleh titik kesetimbangan $E_1(0,0)$. Substitusi $v_2 = \frac{u\beta(1-u)}{\alpha\gamma}$ ke persamaan (8) diperoleh $u = 0$ atau $u = 1$. Substitusi $u = 1$ ke

v_2 sehingga diperoleh titik kesetimbangan $E_2(1,0)$. Substitusi $v_3 = \frac{\gamma}{u(\beta-\gamma)}$ ke persamaan (7)

diperoleh $u^2 - u + \frac{\alpha\gamma^2}{u(\beta^2 - \beta\gamma)} = 0$. Polinomial tersebut memiliki solusi $u_1 < \frac{2}{3} < u_2$ jika $\beta > \gamma$ dan $\alpha < \alpha_{bt}$. Polinomial $u^2 - u + \frac{\alpha\gamma^2}{u(\beta^2 - \beta\gamma)} = 0$ memiliki Solusi tunggal $(\frac{2}{3}, \frac{3\gamma}{2(\beta - \gamma)})$ jika dan hanya jika $\alpha = \frac{4\beta(\beta - \gamma)}{27\gamma^2}$.

1.1. Kestabilan sistem tanpa reaksi difusi-adveksi

Determinan positif memastikan bahwa hasil kali dari nilai eigen adalah positif, sehingga jika kedua nilai eigen adalah real, maka keduanya harus negatif atau keduanya positif. Kondisi ini membantu mengesampingkan kasus-kasus di mana satu nilai eigen positif dan yang lainnya negatif. Jejak negatif memastikan bahwa jumlah kedua nilai eigen adalah negatif, oleh karena itu jika $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$ dan $\lambda_1\lambda_2 > 0$, satu-satunya cara agar kedua kondisi ini terpenuhi adalah jika keduanya negatif. Melinearisasi sistem (3)-(4) di (u_s, v_s) sehingga diperoleh

$$J(u_s, v_s) = \begin{pmatrix} 1 - 2u_s - \frac{\alpha v_s^2}{(u_s v_s + 1)^2} & -\frac{\alpha u_s v_s (u_s v_s + 2)}{(u_s v_s + 1)^2} \\ \frac{\beta v_s^2}{(u_s v_s + 1)^2} & \frac{\beta u_s v_s (2 + u_s v_s)}{(1 + u_s v_s)^2} - \gamma \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Teorema 2. Dari sistem (3)-(6) tanpa reaksi difusi-adveksi ($a_1 = a_2 = d_1 = d_2 = 0$) diperoleh bahwa titik kesetimbangan $E_1(0,0)$ bersifat tidak stabil, $E_2(1,0)$ stabil, dan $E_3(\frac{2}{3}, \frac{3\gamma}{2(\beta - \gamma)})$ is marginally stable if $(1 + 3\beta)^2 < 24$.

Bukti. Pada titik kesetimbangan $E_1(0,0)$, mengevaluasi (9) di $(0,0)$ sehingga diperoleh

$$J(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Dari (10) diperoleh $\text{tr}(J) = 1 - \gamma$ dan $\det(J) = -\gamma$. Karena nilai determinan positif, maka terdapat nilai eigen positif. Oleh karena itu $E_1(0,0)$ bersifat tidak stabil. Pada titik kesetimbangan $E_2(1,0)$, mengevaluasi (9) di $(1,0)$ diperoleh

$$J(1,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Dari (11) diperoleh bahwa $\text{tr}(J(1,0)) = -1 - \gamma$ dan $\det(J(1,0)) = \gamma$. Karena γ merupakan konstanta positif, maka $\text{tr}(J(0,0)) < 0$ dan $\det(J(1,0)) > 0$. Oleh karena itu, diperoleh bahwa titik kesetimbangan $E_2(1,0)$ bersifat stabil. Ryu *et al.* [21] telah membuktikan bahwa $E_2(1,0)$ stabil asimtotik global jika $\alpha > \alpha_{bt}$. Pada titik kesetimbangan $E_3(\frac{2}{3}, \frac{3\gamma}{2(\beta - \gamma)})$, mengevaluasi (9) di $(\frac{2}{3}, \frac{3\gamma}{2(\beta - \gamma)})$ diperoleh

$$J\left(\frac{2}{3}, \frac{3\gamma}{2(\beta - \gamma)}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(-2 + \frac{\gamma}{\beta}) & \frac{4}{27}(3 - \frac{2\beta}{\gamma} - \frac{\gamma}{\beta}) \\ \frac{9\gamma^2}{4\beta} & \frac{(\beta - \gamma)\gamma}{\beta} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Dari (12), diperoleh syarat kestabilan dari syarat nilai trace negatif yaitu $(1 + 3\beta)^2 < 24$ dan diperoleh bahwa nilai $\det(J)$ bernilai nol. Berdasarkan Ryu et al. [21], titik kesetimbangan E_3 bersifat *degenerate* yaitu situasi ketika kestabilan sistem tidak dapat ditentukan dengan analisis kestabilan biasa dikarenakan terdapat karakteristik spesial. Hal tersebut dikarenakan titik kesetimbangan E_3 memiliki nilai v yang bergantung pada parameter β dan γ , serta salah satu nilai eigennya bernilai nol. Jika diasumsikan $\beta > \gamma$ dan $\alpha = \frac{4\beta(\beta-\gamma)}{27\gamma^2}$, maka E_3 bersifat *degenerate*. Selain itu, jika $\gamma \leq \frac{2}{3}$ atau $\frac{2}{3} < \gamma$ dan $\beta \neq \gamma + \frac{\gamma}{3\gamma-2}$, maka E_3 merupakan *saddle-node*. Namun, jika $\frac{2}{3} > \gamma$ dan $\beta = \gamma + \frac{\gamma}{3\gamma-2}$, maka E_3 merupakan *cusps*.

Mengevaluasi (9) di $E_4(u_1, v_1)$ dan $E_5(u_2, v_2)$ diperoleh

$$J(u_i, v_i) = \begin{pmatrix} 1 - 2u_i - \frac{\alpha v_i^2}{(u_i v_i + 1)^2} & -\frac{\alpha u_i v_i (u_i v_i + 2)}{(u_i v_i + 1)^2} \\ \frac{\beta v_i^2}{(u_i v_i + 1)^2} & \frac{\beta u_i v_i (2 + u_i v_i)}{(u_i v_i + 1)^2} - \gamma \end{pmatrix}, \quad (13)$$

dengan $i = 1, 2$. Ryu et al. [21] telah menyelidiki tentang kestabilan titik kesetimbangan $E_4(u_1, v_1)$ dan $E_5(u_2, v_2)$ dengan hasil sebagai berikut

- i. Jika diasumsikan $\gamma < \beta < \beta_1$, maka $E_4(u_1, v_1)$ bersifat *unstable node* jika $\alpha \leq \alpha_2$, *unstable focus* jika $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$, *weak focus* atau *center* jika $\alpha = \alpha_2$, *stable focus* jika $\alpha_2 < \alpha < \alpha_3$, dan *stable node* jika $\alpha_3 \leq \alpha < \alpha_{bt}$,
 - ii. Jika diasumsikan $\gamma \leq \frac{2}{3}$ dan $\beta_1 \leq \beta$ atau $\frac{2}{3} < \gamma$ dan $\beta_1 \leq \beta < \beta_{bt}$, maka $E_4(u_1, v_1)$ bersifat *unstable focus* jika $\alpha < \alpha_2$, *weak focus* atau *center* jika $\alpha = \alpha_2$, *stable focus* jika $\alpha_2 < \alpha < \alpha_3$, dan *stable node* jika $\alpha_3 \leq \alpha < \alpha_{bt}$,
 - iii. Jika diasumsikan $\gamma > \frac{2}{3}$ dan $\beta = \beta_{bt}$, maka $E_4(u_1, v_1)$ bersifat *unstable focus* jika $\alpha < \alpha_{bt}$,
 - iv. Jika diasumsikan $\gamma > \frac{2}{3}$ dan $\beta_{bt} < \beta$ atau $8 < \gamma$ dan $\beta_{bt} \leq \beta < \beta_2$, maka $E_4(u_1, v_1)$ bersifat *unstable focus* jika $\alpha < \alpha_3$ dan *unstable node* jika $\alpha_3 \leq \alpha < \alpha_{bt}$,
 - v. Jika diasumsikan $8 < \gamma$ dan $\beta \geq \beta_2$, maka $E_4(u_1, v_1)$ bersifat *unstable node* jika $\alpha < \alpha_{bt}$,
- dengan

$$\alpha_1(\beta, \gamma) = \frac{\beta(\beta-\gamma)}{\gamma^2} \phi_l^2 (1 - \phi_l) \text{ hanya jika } \phi_l > 0,$$

$$\alpha_2(\beta, \gamma) = \frac{\beta(\beta-\gamma)}{\gamma^2} \phi_m^2 (1 - \phi_m) \text{ hanya jika } \phi_m < \frac{2}{3},$$

$$\alpha_3(\beta, \gamma) = \frac{\beta(\beta-\gamma)}{\gamma^2} \phi_r^2 (1 - \phi_r) \text{ hanya jika } \phi_r > 0,$$

$$\beta_{bt} = \gamma + \frac{\gamma}{3\gamma-2} \text{ hanya jika } \gamma > \frac{2}{3},$$

$$\beta_1(\gamma) = \begin{cases} \gamma + \frac{1}{6} & \text{jika } \gamma = 8 \\ \gamma + \frac{3\gamma - \sqrt{8\gamma(\gamma+1)}}{\gamma-8} & \text{jika } \gamma \neq 8 \end{cases},$$

$$\beta_2(\gamma) = \gamma + \frac{3\gamma - \sqrt{8\gamma(\gamma+1)}}{\gamma-8} \text{ hanya jika } \gamma > 8,$$

$$\phi_m(\beta, \gamma) = \frac{\gamma(1+\beta-\gamma)}{\beta+\gamma}.$$

ϕ_l dan ϕ_r dengan $\phi_l < \phi_r$ merupakan akar dari $\phi(u_1) = \left(\frac{\beta+\gamma}{\beta}\right)^2 (u_1^2 + 2A(\beta, \gamma)u_1 + B(\beta, \gamma))$, dengan $A(\beta, \gamma) = \frac{6\beta\gamma(\beta-\gamma)}{(\beta+\gamma)^2} - \frac{\gamma(1+\beta-\gamma)}{\beta+\gamma}$ dan $B(\beta, \gamma) = \frac{\gamma(1+\beta-\gamma)^2}{(\beta+\gamma)^2} - \frac{8\beta\gamma(\beta-\gamma)}{(\beta+\gamma)^2}$. Selain itu, $E_5(u_2, v_2)$ merupakan *saddle point*.

1.2. Kestabilan sistem dengan reaksi difusi-adveksi

Telah diperoleh bahwa titik kesetimbangan yang memungkinkan stabil hanya E_2 and E_4 , akan diteliti kestabilan titik kesetimbangan tersebut dengan reaksi difusi-adveksi. Digunakan transformasi $\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{w}(x, t)e^{-\left(\frac{a_1}{2d_1}x + \left(\frac{a_1^2}{4d_1} - 1\right)t\right)}$ dan $\mathbf{v}(x, t) = \mathbf{z}(x, t)e^{-\left(\frac{a_2}{2d_2}x + \left(\frac{a_2^2}{4d_2} + \gamma\right)t\right)}$ ke (3)-(6), sehingga diperoleh

$$\mathbf{w}_t = d_1 \mathbf{w}_{xx} - \mathbf{w}^2 e^{-\left(\frac{a_1}{2d_1}x + \left(\frac{a_1^2}{4d_1} + 1\right)t\right)} - \frac{\alpha \mathbf{w} z^2 e^{-2\left(\frac{a_2}{2d_2}x + \left(\frac{a_2^2}{4d_2} + \gamma\right)t\right)}}{\mathbf{w} z e^{-\left(\left(\frac{a_1}{2d_1} + \frac{a_2}{2d_2}\right)x + \left(\frac{a_1^2}{4d_1} + 1 + \frac{a_2^2}{4d_2} + \gamma\right)t\right)} + 1}, \quad (14)$$

$$\mathbf{z}_t = d_2 \mathbf{z}_{xx} + \frac{\beta \mathbf{w} z^2 e^{-\left(\frac{a_1}{2d_1} + \frac{a_2}{2d_2}\right)x + \left(\frac{a_1^2}{4d_1} - 1 + \frac{a_2^2}{4d_2} + \gamma\right)t}}{\mathbf{w} z e^{-\left(\frac{a_1}{2d_1} + \frac{a_2}{2d_2}\right)x + \left(\frac{a_1^2}{4d_1} - 1 + \frac{a_2^2}{4d_2} + \gamma\right)t}} + 1. \quad (15)$$

Untuk menyelidiki pengaruh reaksi difusi-adveksi, digunakan perturbasi kecil berikut

$$\mathbf{w}(x, t) = \mathbf{w}_s + \mathbf{a}(x, t) \text{ dan } \mathbf{z}(x, t) = \mathbf{z}_s + \mathbf{b}(x, t) \quad (16)$$

dengan $\mathbf{a}(x, t)$ dan $\mathbf{b}(x, t)$ sangat kecil. Linearisasi di sekitar $(\mathbf{w}_s, \mathbf{z}_s)$ dan substitusi \mathbf{u}_s dan \mathbf{v}_s diperoleh

$$\mathbf{a}_t = d_1 \mathbf{a}_{xx} + \left(-2\mathbf{u}_s - \frac{\alpha \mathbf{v}_s^2}{(\mathbf{u}_s \mathbf{v}_s + 1)^2}\right) \mathbf{a} - \left(\frac{\alpha \mathbf{u}_s \mathbf{v}_s (2e^{-\left(\frac{a_1}{2d_1} + \frac{a_2}{2d_2}\right)x + \left(\frac{a_1^2}{4d_1} - 1 + \frac{a_2^2}{4d_2} + \gamma\right)t} + \mathbf{u}_s \mathbf{v}_s e^{2\left(\frac{a_1}{2d_1}x + \left(\frac{a_1^2}{4d_1} + 1\right)t\right)}}}{(\mathbf{u}_s \mathbf{v}_s + 1)^2}\right) \mathbf{b}, \quad (17)$$

$$\mathbf{b}_t = d_2 \mathbf{b}_{xx} + \left(\frac{\beta \mathbf{v}_s^2 e^{-\left(\frac{a_1}{2d_1} + \frac{a_2}{2d_2}\right)x + \left(\frac{a_1^2}{4d_1} - 1\right) - \left(\frac{a_2^2}{4d_2} + \gamma\right)t}}{(\mathbf{u}_s \mathbf{v}_s + 1)^2}\right) \mathbf{a} + \left(\frac{\beta \mathbf{u}_s \mathbf{v}_s (2 - \mathbf{u}_s \mathbf{v}_s e^{-\left(\frac{a_1}{2d_1} + \frac{a_2}{2d_2}\right)x + \left(\frac{a_1^2}{4d_1} - 1\right) - \left(\frac{a_2^2}{4d_2} + \gamma\right)t}}}{(\mathbf{u}_s \mathbf{v}_s + 1)^2}\right) \mathbf{b}, \quad (18)$$

$$\mathbf{a}_x(\mathbf{0}, t) = \mathbf{a}_x(\ell, t) = \mathbf{0}, \mathbf{b}_x(\mathbf{0}, t) = \mathbf{b}_x(\ell, t) = \mathbf{0}, t > \mathbf{0}, \quad (19)$$

$$\mathbf{a}(x, \mathbf{0}) = \mathbf{u}_0(x) + \mathbf{u}_s, \mathbf{b}(x, \mathbf{0}) = \mathbf{v}_0(x) + \mathbf{v}_s, x \in \Omega. \quad (20)$$

Syarat batas Neumann menyatakan bahwa turunan parsial fungsi pada batas domain adalah nol. Pada konteks pemangsa-mangsa, pada kondisi Neumann perturbasi kecil (16) dapat diuraikan sebagai deret Fourier

$$a(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varepsilon_k(t) \cos kx, \quad (21)$$

$$b(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k(t) \cos kx. \quad (22)$$

Dengan menyubstitusikan (21)-(22) ke (16)-(19) dan misalkan $\mu_1 = e^{(\theta_2 - \theta_1)x - (\eta_2 - \eta_1)t}$, $\mu_2 = e^{(\theta_1 - \theta_2)x - (\eta_1 - \eta_2)t}$, $q_1 = \frac{z_s^2 \mu_2}{(w_s z_s \mu_1 \mu_2 + 1)^2}$, $q_2 = \frac{w_s z_s \mu_2}{(w_s z_s \mu_1 \mu_2 + 1)^2}$, dan $q_3 = w_s z_s \mu_1 \mu_2$ diperoleh

$$\begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_k(t) \\ \dot{\delta}_k(t) \end{pmatrix} = J_k \begin{pmatrix} \varepsilon_k(t) \\ \delta_k(t) \end{pmatrix}, \quad (23)$$

dengan

$$J_k = \begin{pmatrix} -d_1 k^2 + 2w_s \mu_1 - \frac{\alpha q_1}{\mu_2} & -\alpha q_2 \mu_2 (q_3 + 2) \\ \beta q_1 \mu_1 & -d_2 k^2 + \beta q_2 \mu_1 (2 - q_3) \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Seperti yang sudah dijelaskan sebelumnya, nilai trace negatif dan determinan positif menjamin bagian real dari nilai eigen bernilai negatif. Dari (24), diperoleh bahwa

$$\text{tr}(J_k) = -(d_1 + d_2)k^2 + 2w_s \mu_1 - \alpha q_1 \mu_2 + \beta q_2 q_4 \mu_1, \quad (25)$$

$$\det(J_k) = d_1 d_2 k^4 + (-2d_2 w_s \mu_1 + \alpha d_2 q_1 \mu_2 - \beta d_1 q_2 q_4 \mu_1)k^2 + 2w_s q_2 q_4 \mu_1^2, \quad (26)$$

dengan $q_4 = 2 - q_3$. Substitusi nilai $w = \frac{u}{\mu_1}$ and $z = \frac{v}{\mu_2}$ ke trace (27) dan determinan (28) sehingga diperoleh

$$\text{tr}(J_k) = -(d_1 + d_2)k^2 + 2u_s - \alpha q_5 + \beta q_4 q_6, \quad (27)$$

$$\det(J_k) = d_1 d_2 k^4 + (-2d_2 u_s + \alpha d_2 q_5 - \beta d_1 q_4 q_6)k^2 + 2q_4 q_6 u_s. \quad (28)$$

Teorema 3. Jika d_1 dan d_2 merupakan koefisien difusi yang konstan, α_1 dan α_2 merupakan koefisien adveksi yang konstan, maka sistem (17)-(20) memiliki titik kesetimbangan $(1,0)$ yang stabil jika $k^2 > \frac{2}{d_1 + d_2}$.

Bukti. Mengevaluasi (27)-(28) di $(u_s, v_s) = (1,0)$ sehingga diperoleh kondisi $(d_1 + d_2)k^2 - 2 > 0$ dan $d_2 k^2 (-2 + d_1 k^2) > 0$. Kondisi $(d_1 + d_2)k^2 - 2 > 0$ dapat disederhanakan menjadi $k^2 > \frac{2}{d_1 + d_2}$. Oleh karena itu, titik kesetimbangan $(1,0)$ bersifat stabil jika $k^2 > \frac{2}{d_1 + d_2}$.

Teorema 4. Jika d_1 dan d_2 merupakan koefisien difusi yang konstan, α_1 dan α_2 merupakan koefisien adveksi yang konstan, maka sistem (17)-(20) memiliki titik kesetimbangan $E_4(u_1, v_1)$ yang stabil jika $\beta q_4 q_6 + 2u_1 < (d_1 + d_2)k^2 + \alpha q_5$ dan $d_1 d_2 k^4 + (-2d_2 u_1 + \alpha d_2 q_5 - \beta d_1 q_4 q_6)k^2 + q u_1 q_4 q_6 > 0$, dengan $q_4 = 2 - u_1 v_1$, $q_5 = \frac{v_1^2}{(u_1 v_1 + 1)^2}$, dan $q_6 = \frac{u_1 v_1 (2 + u_1 v_1)}{(u_1 v_1 + 1)^2}$.

Bukti. Mengevaluasi (27)-(28) di (u_1, v_1) sehingga diperoleh

$$\beta q_4 q_6 + 2u_1 < (d_1 + d_2)k^2 + \alpha q_5, \quad (29)$$

$$d_1 d_2 k^4 + (-2d_2 u_1 + \alpha d_2 q_5 - \beta d_1 q_4 q_6)k^2 + q u_1 q_4 q_6 > 0. \quad (30)$$

Oleh karena itu, titik kesetimbangan $E_4(u_1, v_1)$ bersifat stabil jika $9\gamma^2 > \gamma + \beta(3 + 6\gamma)$ dan $24d_1 d_2 \gamma(-4\beta^2 + 5\beta\gamma + \gamma^2) + (3d_1(2\beta - 3\gamma)\gamma + d_2(3\beta + \gamma))^2 < 0$, dengan $q_4 = 2 - u_1 v_1$, $q_5 = \frac{v_1^2}{(u_1 v_1 + 1)^2}$, dan $q_6 = \frac{u_1 v_1 (2 + u_1 v_1)}{(u_1 v_1 + 1)^2}$.

1.3. Analisis Bifurkasi

Sistem tidak stabil ketika $\text{tr}(J_k) \geq 0$ atau $\det(J_k) \leq 0$ untuk beberapa nilai k . Ketakstabilan Turing terjadi ketika dua kondisi: (i) Titik kesetimbangan stabil tanpa reaksi difusi-adveksi; (ii) Adanya reaksi difusi-adveksi mengganggu kestabilan sistem ($\det(J_k) < 0$ untuk beberapa nilai k). Bifurkasi Hopf terjadi ketika $\text{tr}(J_k) = 0$ dan $\det(J_k) > 0$ untuk beberapa nilai k . Kondisi kritis ketakstabilan Turing adalah $\det(J_k) = 0$ untuk beberapa nilai k . Analisis bifurkasi hanya dilakukan pada titik kesetimbangan nontrivial dan stabil tanpa adanya reaksi difusi-adveksi yaitu titik kesetimbangan $E_4(u_1, v_1)$. Jika diberikan nilai determinan sebagai berikut

$$\det(J_R) = \det(D_R)k^4 - \kappa_R k^2 + \det(J_R), \quad (31)$$

dengan

$$D_R = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}, J_R = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \kappa_R = d_1 a_{22} + d_2 a_{11},$$

Maka nilai $\det(J_R)$ mencapai minimum ketika

$$k_{min}^2 = \frac{\kappa_R}{2\det(D_R)}. \quad (32)$$

Mengevaluasi $\det(J_R) = 0$ di k_{min}^2 sehingga

$$\det(J_R)|_{k_{min}^2} = -\frac{\kappa_R^2}{4\det(D_R)} + \det(J_R) = 0. \quad (33)$$

Dari kondisi kritis ketakstabilan Turing tersebut, diperoleh

$$k_T^2 = \sqrt{\frac{\det(J_R)}{\det(D_R)}}. \quad (34)$$

Pada sistem pemangsa-mangsa tanpa adanya reaksi difusi-adveksi, diperoleh nilai matriks J_k dengan nilai trace dan determinan sebagai berikut.

$$\text{tr}(J_k) = \text{tr}(J_{DA}) - \text{tr}(D)k^2, \quad (35)$$

$$\det(J_k) = \det(D)k^4 - (\beta d_1 q_5 + d_2(2u_s - \alpha q_5))k^2 + \det(J_{DA}). \quad (36)$$

Analisis bifurkasi dilakukan pada titik kesetimbangan $E_4(u_1, v_1)$.

Ketakstabilan Turing

Kondisi kritis ketakstabilan Turing adalah ketika $\det(J_k) = 0$ untuk beberapa nilai k . Substitusi nilai k_T^2 ke $\det(J_k) < 0$ sehingga diperoleh

$$\det(J_k)|_{k_T^2} = \kappa^2 > 4\det(J)\det(D), \quad (37)$$

dengan $\kappa_{DA} = \beta d_1 q_5 + d_2(2u_s - \alpha q_5)$.

Teorema 5. Pada titik kesetimbangan $E_4(u_1, v_1)$ sistem (3)-(6), terdapat ketidakstabilan Turing apabila dipenuhi

- a) $\gamma < \beta < \beta_1$ if $\alpha_2 < \alpha < \alpha_3$ or $\alpha_3 \leq \alpha < \alpha_{bt}$, or $\gamma \leq \frac{2}{3}$ and $\beta_1 \leq \beta$ or $\frac{2}{3} < \gamma$ and $\beta_1 \leq \beta < \beta_{bt}$ if $\alpha_2 < \alpha < \alpha_3$ or $\alpha_3 \leq \alpha < \alpha_{bt}$,
- b) $t_2(-2u_1 t_1 + \alpha v_1(u_1 + v_1)) + u_1(2d_2 t_1 - \alpha d_2 v_1 + \beta d_1 v_1)^2 > 0$,
- c) $\kappa_{DA} > 0$,

dengan $\kappa_{DA} = \beta d_1 q_5 + d_2(2u_s - \alpha q_5)$ dan $t_2 = 4\beta d_1 d_2 v_1$.

Bukti. Ketidakstabilan Turing terjadi ketika terdapat nilai parameter yang membuat sistem yang awalnya stabil menjadi tidak stabil untuk beberapa nilai k . Berdasarkan penjelasan pada bagian analisis kestabilan titik setimbang tanpa reaksi difusi-adveksi, telah diperoleh bahwa sistem (3)-(6) stabil di $E_4(u_1, v_1)$ jika dipenuhi kondisi berikut.

- (i) Jika diasumsikan $\gamma < \beta < \beta_1$, maka $E_4(u_1, v_1)$ bersifat *stable focus* jika $\alpha_2 < \alpha < \alpha_3$ atau $\alpha_3 \leq \alpha < \alpha_{bt}$,
- (ii) Jika diasumsikan $\gamma \leq \frac{2}{3}$ dan $\beta_1 \leq \beta$ atau $\frac{2}{3} < \gamma$ dan $\beta_1 \leq \beta < \beta_{bt}$, maka $E_4(u_1, v_1)$ bersifat *stable focus* jika $\alpha_2 < \alpha < \alpha_3$ dan *stable node* jika $\alpha_3 \leq \alpha < \alpha_{bt}$.

Mengevaluasi (37) di $E_4(u_1, v_1)$ sehingga diperoleh

$$t_2(-2u_1 t_1 + \alpha v_1(u_1 + v_1)) + u_1(2d_2 t_1 - \alpha d_2 v_1 + \beta d_1 v_1)^2 > 0,$$

dengan $t_1 = (1 + u_1 v_1)^2$ dan $t_2 = 4\beta d_1 d_2 v_1$. Nilai κ_{DA} harus positif untuk mengganggu kondisi stabilitas $\det(J_k) > 0$ karena $\det(J)$ positif sebagai salah satu syarat bifurkasi Turing. Oleh karena itu, sistem mengalami ketidakstabilan Turing pada titik kesetimbangan $E_4(u_1, v_1)$ jika dipenuhi kondisi (i) atau (ii), κ_{DA} , dan kondisi (37).

Bifurkasi Hopf

Bifurkasi Hopf memiliki kondisi kritis $\text{tr}(J_k) = 0$ dan $\det(J_k) > 0$ untuk beberapa nilai k . Substitusi nilai k_T^2 ke $\text{tr}(J_k) = 0$ memberikan kondisi

$$\det(J) = \frac{\det(D)(\text{tr}(J))^2}{(\text{tr}(D))^2}. \quad (38)$$

Sistem tidak stabil jika nilai $\text{tr}(J_k) \geq 0$, sehingga diperoleh

$$\det(J) \leq \frac{\det(D)(\text{tr}(J))^2}{(\text{tr}(D))^2}. \quad (39)$$

Teorema 6. Pada titik kesetimbangan $E_4(u_1, v_1)$ sistem (3)-(6), terdapat bifurkasi Hopf jika dipenuhi

$$\frac{\beta u_1 v_1 h_1}{t_1^2} < \frac{d_1 d_2 u_1^2 \left(2 + \frac{v_1(-\alpha + \beta)}{t_1}\right)^2}{(d_1 + d_2)^2}, \tag{40}$$

dengan $t_1 = (1 + u_1 v_1)^2$ dan $h_1 = (2u_1 - \alpha v_1(u_1 + v_1))$.

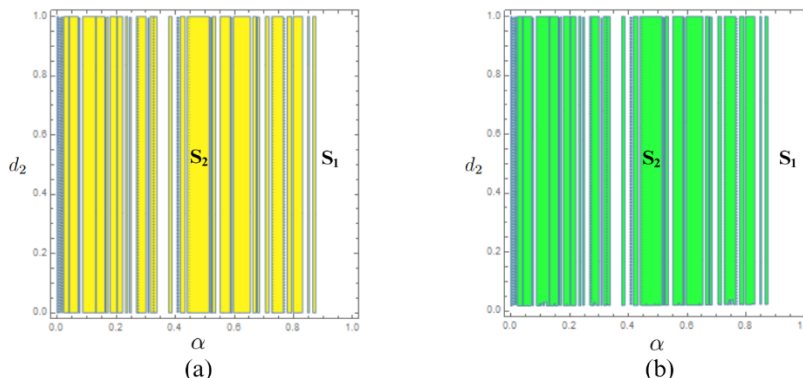
Bukti. Mengevaluasi (40) di $E_4(u_1, v_1)$ sehingga

$$\frac{\beta u_1 v_1 h_1}{t_1^2} < \frac{d_1 d_2 u_1^2 \left(2 + \frac{v_1(-\alpha + \beta)}{t_1}\right)^2}{(d_1 + d_2)^2}, \tag{41}$$

dengan $t_1 = (1 + u_1 v_1)^2$ dan $h_1 = (2u_1 - \alpha v_1(u_1 + v_1))$. Oleh karena itu, diperoleh bahwa bifurkasi Hopf terjadi pada titik kesetimbangan $E_4(u_1, v_1)$ ketika kondisi (41) dipenuhi.

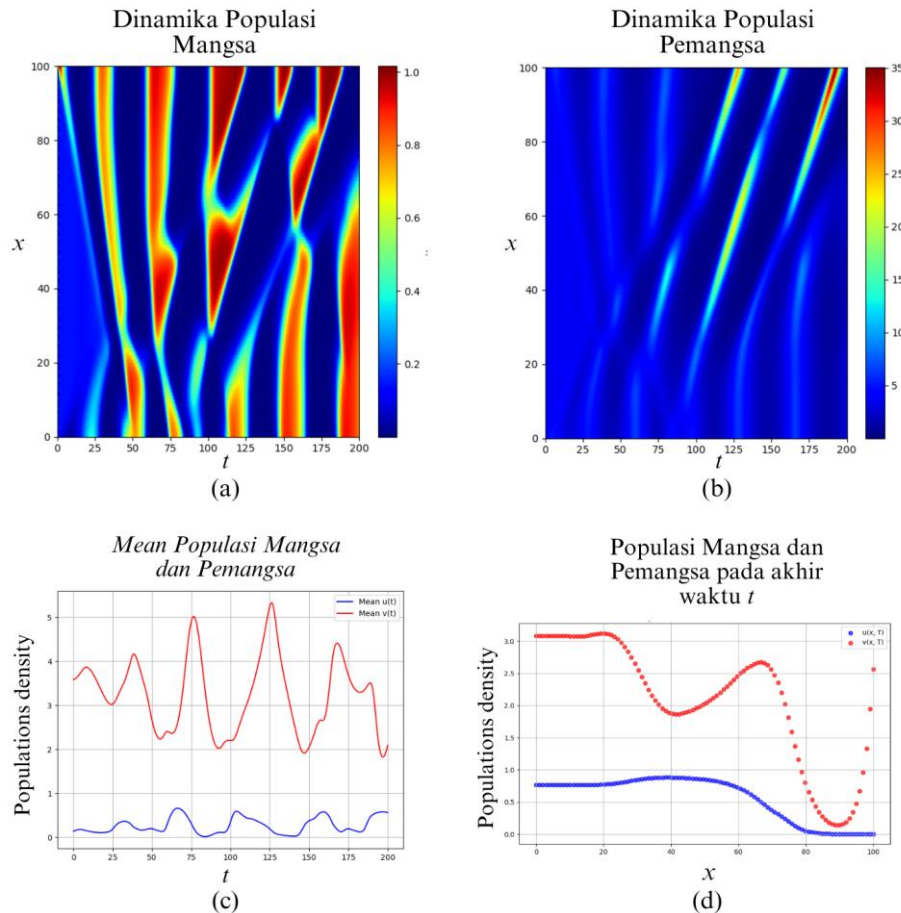
Pemilihan nilai parameter

Jika $\beta = 0.3$, $\gamma = 0.1$, dan $d_1 = 0.5$ dipilih, maka titik kesetimbangan $E_4(u_1, v_1)$ bergantung pada parameter α . Dengan menggunakan nilai parameter yang telah ditentukan, maka diperoleh hasil daerah bifurkasi seperti pada Gambar 1.



Gambar 1. Diagram bifurkasi ($\beta = 0.3$, $\gamma = 0.1$, dan $d_1 = 0.5$).

Daerah S_1 merupakan daerah tanpa bifurkasi, sedangkan daerah S_2 merupakan daerah bifurkasi. Jika $\beta = 0.3$, $\gamma = 0.1$, dan $d_1 = 0.5$ dipilih, ada nilai positif dari parameter d_2 dan α yang memenuhi kondisi bifurkasi Turing dan Hopf. Jika dipilih $\alpha = 0.1$, maka diperoleh titik kesetimbangan $E_4(u_1, v_1) = (0.13914, 3.5935)$. Jadi, terdapat bifurkasi Turing-Hopf jika nilai parameter tersebut dipilih. Untuk simulasi sistem, dipilih bobot gangguan kecil $a(x, t)$ dan $b(x, t)$, yaitu $\epsilon = \delta = 0.1$. Hasil simulasi ditunjukkan pada Gambar 2.



Gambar 2. (a) Dinamika Populasi Mangsa, (b) Dinamika Populasi Pemangsa, (c) *Mean* Populasi Mangsa dan Pemangsa. (d) Persebaran Populasi Pemangsa dan Mangsa pada waktu $t = 200$. Pada Dinamika tersebut, terlihat bahwa terjadi tidak seimbangny populasi secara spasial.

Pada Gambar 2, dapat dilihat bahwa terdapat dinamika yang berfluktuasi seiring berjalannya waktu t . Pada akhir waktu simulasi $t = 200$, ditemukan bahwa terdapat perbedaan populasi mangsa dan pemangsa di sepanjang domain posisi x .

4 Simpulan

Dalam penelitian ini, diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

1. Terdapat titik kesetimbangan kepunahan mangsa-pemangsa, kepunahan pemangsa, dan titik kesetimbangan yang memungkinkan pemangsa dan mangsa untuk tetap lestari.
2. Pada sistem pemangsa-mangsa tanpa difusi-advksi, titik kesetimbangan E_1 tidak stabil, E_2 stabil, E_3 *degenerate*, E_4 memiliki tipe kestabilan yang bergantung pada parameter α , β , dan γ . Serta E_5 merupakan *saddle point*.
3. Pada sistem mangsa-pemangsa dengan reaksi difusi-advksi, titik kesetimbangan E_2 menjadi stabil pada kondisi tertentu. Sedangkan titik kesetimbangan E_4 memiliki syarat kestabilan yang lebih kompleks jika dibandingkan dengan sistem tanpa difusi-advksi.

4. Pada sistem mangsa-pemangsa dengan reaksi difusi-adveksi, ketakstabilan Turing dan bifurkasi Hopf terjadi untuk nilai parameter tertentu.
5. Jika dipilih nilai parameter $\beta = 0,3$, $\gamma = 0,1$, $d_1 = 0,5$, dan $\alpha = 0,1$, maka diperoleh titik kesetimbangan $E_4(u_1, v_1) = (0,13914, 3,5935)$ di mana terjadi bifurkasi Turing-Hopf.
6. Pada penelitian ini, digunakan asumsi parameter bernilai konstan dan pada domain 2 dimensi. Untuk penelitian selanjutnya dapat dilakukan pengembangan terkait nilai parameter bernilai fungsi dan menggunakan skema pemangsa-mangsa yang lebih kompleks dengan memperhatikan lebih banyak pengaruh lingkungan.

5 Ucapan Terima Kasih

Melalui tulisan ini, kami mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya atas dukungan dari Himpunan Matematika Indonesia melalui skema konferensi matematika nasional dan Program Studi Matematika Universitas Sebelas Maret.

6 Daftar Pustaka

- [1] A. J. Lotka, "Contribution to the Theory of Periodic Reactions," *J. Phys. Chem.*, vol. 14, pp. 271–274, 1910, [Online]. Available: <https://doi.org/10.1021/j150111a004>
- [2] V. Volterra, "Fluctuations in the Abundance of a Species considered Mathematically," *Nature*, vol. 118, pp. 558–560, 1926, [Online]. Available: <https://doi.org/10.1038/118558a0>
- [3] L. Edelstein-Keshet, *Mathematical Models in Biology*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005.
- [4] A. Ejaz, Y. Nawaz, M. S. Arif, D. S. Mashat, and K. Abodayeh, "Stability Analysis of Predator-Prey System with Consuming Resource and Disease in Predator Species," *C. - Comput. Model. Eng. Sci.*, vol. 131, no. 1, 2022, doi: 10.32604/cmesci.2022.019440.
- [5] M. S. Arif, K. Abodayeh, and A. Ejaz, "On the stability of the diffusive and non-diffusive predator-prey system with consuming resources and disease in prey species," *Math. Biosci. Eng.*, vol. 20, no. 3, pp. 5066–5093, 2023, doi: 10.3934/mbe.2023235.
- [6] B. Mondal, U. Ghosh, S. Sarkar, and P. K. Tiwari, "A generalist predator-prey system with the effects of fear and refuge in deterministic and stochastic environments," *Math. Comput. Simul.*, vol. 225, pp. 968–991, 2024, doi: 10.1016/j.matcom.2023.09.022.
- [7] T. Wen, Q. Gao, T. Kalmár-Nagy, Y. Deng, and K. H. Cheong, "A review of predator-prey systems with dormancy of predators," *Nonlinear Dyn.*, vol. 107, no. 4, pp. 3271–3289, 2022, doi: 10.1007/s11071-021-07083-x.
- [8] F. Wei, L. Chen, and J. Huang, "Modeling the Allee effect and fear effect in predator-prey

-
- system incorporating a prey refuge,” *Adv. Contin. Discret. Model.*, vol. 28, no. 1, pp. 8–25, 2022, doi: 10.1186/s13662-021-03452-2.
- [9] Z. Chen, S. Li, and X. Zhang, “Analysis of a Delayed Reaction-Diffusion Predator-Prey System with Fear Effect and Anti-Predator Behaviour,” *Mathematics*, vol. 10, no. 18, p. 3270, 2022.
- [10] M. Bendahmane, “Analysis of a reaction-diffusion system modeling predator-prey with prey-taxis,” *Networks Heterog. Media*, vol. 3, no. 4, pp. 863–879, 2008.
- [11] L. N. Guin and S. Acharya, “Dynamic behaviour of a reaction-diffusion predator-prey model with both refuge and harvesting,” *Nonlinear Dyn.*, vol. 88, pp. 1501–1533, 2017.
- [12] S. Yan, D. Jia, T. Zhang, and S. Yuan, “Pattern dynamics in a diffusive predator-prey model with hunting cooperations,” *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 130, p. 109428, 2020.
- [13] F. Souana, S. Djilali, and F. Charif, “Mathematical analysis of a diffusive predator-prey model with herd behavior and prey escaping,” *Math. Model. Nat. Phenom.*, vol. 15, p. 23, 2020.
- [14] S. Sutrima, “Lotka-Volterra system of predator-prey type with time-dependent diffusive,” *Results Nonlinear Anal.*, vol. 7, no. 2, pp. 27–42, 2024.
- [15] X. Zhang and H. Zhao, “Bifurcation and optimal harvesting of a diffusive predator-prey system with delays and interval biological parameters,” *J. Theor. Biol.*, vol. 363, pp. 390–403, 2014.
- [16] Y. Zhao and M. Wang, “A reaction-diffusion-advection equation with mixed and free boundary conditions,” *J. Dyn. Differ. Equations*, vol. 30, pp. 743–777, 2018.
- [17] C. Cosner and others, “Reaction-diffusion-advection models for the effects and evolution of dispersal,” *Discret. Contin. Dyn. Syst.*, vol. 34, no. 5, pp. 1701–1745, 2014.
- [18] X. Chen, K.-Y. Lam, and Y. Lou, “Dynamics of a reaction-diffusion-advection model for two competing species,” *Discret. Contin. Dyn. Syst.*, vol. 32, no. 11, pp. 3841–3859, 2012.
- [19] M. Gahn, M. Neuss-Radu, and I. S. Pop, “Homogenization of a reaction-diffusion-advection problem in an evolving micro-domain and including nonlinear boundary conditions,” *J. Differ. Equ.*, vol. 289, pp. 95–127, 2021.
- [20] L. Ma and S. Guo, “Bifurcation and stability of a two-species reaction-diffusion-advection competition model,” *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, vol. 59, p. 103241, 2021.
- [21] K. Il Ryu, H. Matsuzawa, and Y. Kuang, “Bifurcation analysis in a predator-prey system with a functional response increasing in both predator and prey densities,” *Math. Biosci. Eng.*, vol. 15, no. 3, pp. 771–789, 2018.