

Submodul Maksimal Bertingkat Terdekomposisi pada Modul Bertingkat

Mohammad Agus Kholilurrohman^{1*}, Sutopo², Ari Suparwanto³

^{1,2,3}Program Studi Magister Matematika

Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta, Indonesia

e-mail: mohammadaguskholilurrohman@mail.ugm.ac.id

Diajukan: 27 Juni 2025, Diperbaiki: 19 April 2026, Diterima: 7 Mei 2026

Abstrak

Diberikan grup G dengan elemen identitas e dan ring bertingkat R tipe G . Dari ring bertingkat tersebut dapat dibentuk modul bertingkat. Modul M disebut modul bertingkat jika terdapat koleksi subgrup abelian dari M , katakan $\{M_g | g \in G\}$, sedemikian sehingga untuk setiap $g, h \in G$ berlaku $M = \bigoplus_{g \in G} M_g$ dan $R_g M_h \subseteq M_{gh}$. Lebih lanjut, konsep submodul maksimal juga dapat didefinisikan pada modul bertingkat. Submodul bertingkat sejati N dari M dikatakan maksimal bertingkat jika tidak ada submodul sejati bertingkat lain yang memuat N selain M itu sendiri. Tidak hanya modul biasa yang dapat didekomposisikan, modul bertingkat juga dapat didekomposisikan. Pada penelitian ini dibahas mengenai modul bertingkat dengan submodul maksimal bertingkat terdekomposisi. Dengan dekomposisi ini diperoleh sifat-sifat yang berhubungan dengan submodul maksimal bertingkat, modul sederhana bertingkat, homomorfisma modul bertingkat, modul torsi bertingkat, dan penjumlahan langsung bertingkat.

Kata Kunci: dekomposisi modul, modul bertingkat, submodul maksimal bertingkat, homomorfisma modul bertingkat, penjumlahan langsung bertingkat.

Abstract

Given G be a group with identity e , and graded ring R type G . By the graded ring can be formed graded module. A module M is called to be a graded module over graded ring R type G if there is family of subgroups of M , say $\{M_g | g \in G\}$, for all $g, h \in G$ such that $M = \bigoplus_{g \in G} M_g$ and $R_g M_h \subseteq M_{gh}$. Furthermore, the concepts of maximal submodule can also be defined in graded module. The graded proper submodule N of M is said to be a graded maximal if there is no graded other submodule that contains N properly except M itself. Not only usual module can be decomposed, but also graded module can be decomposed. This research discusses about graded modules with decomposed graded maximal submodules. By the decomposition, we obtain some properties that relate with graded maximal submodule, graded simple module, graded module homomorphism, graded torsion module, and graded direct summand.

Keywords: decompositions of module, graded Module, graded maximal submodule, graded module homomorphism, graded direct summand.

1 Pendahuluan

Terdapat banyak jenis ring yang digunakan sebagai tumpuan dalam membentuk suatu modul, salah satunya adalah ring bertingkat. Untuk mendefinisikan suatu ring bertingkat diperlukan struktur grup. Diberikan grup G dengan elemen identitas e . Suatu ring R dengan elemen satuan

disebut ring bertingkat tipe G jika terdapat koleksi subgrup dari R , katakan $\{R_g \mid g \in G\}$, sedemikian sehingga untuk setiap $g, h \in G$ memenuhi $R = \bigoplus_{g \in G} R_g$ dan $R_g R_h \subseteq R_{gh}$. Sebarang ring R dapat dipandang sebagai ring bertingkat tipe G dengan mengambil tingkatan $R_e = R$ dan $R_g = \{0\}$ untuk setiap $g \neq e \in G$. Ring bertingkat dengan tingkatan semacam itu disebut ring bertingkat trivial. Lebih lanjut, beberapa sifat ring bertingkat dibahas pada [1] dan [2].

Setelah mendefinisikan ring bertingkat, dapat didefinisikan suatu modul bertingkat. Diberikan ring bertingkat R tipe G . Modul M disebut modul bertingkat jika terdapat koleksi subgroup abelian dari M , katakan $\{M_g \mid g \in G\}$, sedemikian sehingga untuk setiap $g, h \in G$ memenuhi $M = \bigoplus_{g \in G} M_g$ dan $R_g M_h \subseteq M_{gh}$. Dalam modul bertingkat juga dikenalkan konsep submodul bertingkat maksimal. Submodul maksimal $N \subset M$ disebut submodul maksimal bertingkat jika tidak ada submodul bertingkat lain yang memuat N selain M itu sendiri. Lebih lanjut, beberapa sifat terkait modul bertingkat dapat ditemukan pada [1]

Dalam matematika, khususnya bidang aljabar, dekomposisi sangat diperlukan untuk mengenali sifat pada suatu struktur aljabar, termasuk pada struktur modul. Dekomposisi modul adalah cara menyajikan modul dalam bentuk jumlahan langsung dari submodul-submodulnya. Dengan menguraikannya menjadi submodul-submodul, dimaksudkan dapat mempermudah dalam mengkaji suatu struktur modul atau mengkarakterisasi modul.

Tidak hanya modul biasa yang dapat didekomposisikan, modul bertingkat juga dapat didekomposisikan. Penelitian mengenai dekomposisi modul bertingkat telah dilakukan dalam [3]. Pada penelitian tersebut, dibahas mengenai dekomposisi submodul maksimal bertingkat. Dengan dekomposisi tersebut, dapat diperoleh sifat-sifat submodul maksimal bertingkat, homomorfisma modul bertingkat dan penjumlahan langsung bertingkat.

Pada dasarnya, modul bertingkat merupakan modul biasa yang memenuhi kondisi tertentu. Oleh karena itu, pada penelitian ini akan diselidiki apakah sifat-sifat yang berlaku pada modul biasa masih berlaku pada modul bertingkat. Selanjutnya, tidak semua modul faktor bertingkat yang terbentuk dari modul bebas torsi bertingkat selalu menjadi modul bebas torsi bertingkat. Dari fakta tersebut, dapat disusun syarat perlu dan cukup suatu modul faktor bertingkat merupakan modul torsi bertingkat. Tidak semua submodul maksimal bertingkat merupakan penjumlahan langsung bertingkat. Oleh sebab itu, pada penelitian ini akan disusun syarat perlu dan cukup suatu submodul maksimal bertingkat bertingkat merupakan penjumlahan langsung bertingkat.

Pada penelitian ini, grup yang digunakan merupakan grup komutatif. Sementara itu, ring yang digunakan adalah ring bertingkat yang dilengkapi dengan elemen satuan. Lebih lanjut, modul yang digunakan merupakan modul kiri bertingkat.

2 Metode Penelitian

Metode penelitian yang dilakukan dalam penelitian ini adalah studi literatur yang mengkaji dekomposisi submodul maksimal bertingkat. Terlebih dahulu dipelajari mengenai ring bertingkat. Dengan ring bertingkat tersebut, dapat dibentuk modul bertingkat, khususnya submodul maksimal bertingkat. Selanjutnya, dipelajari dekomposisi submodul maksimal bertingkat, guna mendapatkan ide dan gambaran untuk mencapai hasil yang sesuai dengan tujuan penelitian. Untuk mempermudah pemahaman terhadap hasil dan pembahasan pada bab berikutnya, diberikan beberapa konsep dasar yang diperlukan terkait dekomposisi submodul maksimal bertingkat.

2.1 Ring bertingkat

Berikut definisi ring bertingkat.

Definisi 1[2] *Diberikan grup G dengan elemen identitas e . Suatu ring R dengan elemen satuan disebut ring bertingkat tipe G jika terdapat koleksi subgrup dari R , katakan $\{R_g \mid g \in G\}$ sedemikian sehingga untuk setiap $g, h \in G$ memenuhi $R = \bigoplus_{g \in G} R_g$ dan $R_g R_h \subseteq R_{gh}$.*

Setiap ring R selalu bisa dipandang sebagai ring bertingkat dengan $R_e = R$ dan $R_g = \{0\}$ untuk setiap $g \neq e$. Ring bertingkat dengan tingkatan semacam itu disebut ring bertingkat trivial. Himpunan $\{g \in G \mid R_g \neq \{0\}\}$ disebut support dari R dinotasikan dengan $\text{supp}(R, G)$. Elemen $r_g \in R_g$ disebut elemen homogen berderajat g . Himpunan $h(R) = \bigcup_{g \in G} R_g$ merupakan himpunan semua elemen homogen dari R .

Proposisi berikut menjelaskan bahwa satu-satunya komponen homogen dari ring bertingkat R yang merupakan subring adalah R_e .

Proposisi 2 [4] *Diberikan ring R dengan elemen satuan 1 dan grup G dengan elemen identitas e . Jika R ring bertingkat tipe G , maka R_e merupakan subring dan $1 \in R_e$.*

Selanjutnya didefinisikan subring dan ideal bertingkat.

Definisi 3 [2] *Diberikan ring bertingkat R tipe G dan dimisalkan S subring dari R . Subring S disebut subring bertingkat tipe G jika $S = \bigoplus_{g \in G} S \cap R_g$. Selanjutnya, diberikan ring bertingkat R tipe G dan dimisalkan I ideal dari R . Ideal I disebut ideal bertingkat tipe G jika $I = \bigoplus_{g \in G} I \cap R_g$.*

Dalam ring biasa, irisan dan hasil penjumlahan dua ideal juga merupakan ideal. Sifat tersebut tetap berlaku pada ring bertingkat. Lema berikut menyatakan sifat yang dimaksud.

Lema 4 [5] *Diberikan ring bertingkat R tipe G . Jika I dan J merupakan ideal bertingkat di R , maka $I + J$ dan $I \cap J$ masing-masing merupakan ideal bertingkat.*

2.2 Modul Bertingkat

Modul atas ring bertingkat disebut modul bertingkat jika memenuhi syarat-syarat tertentu. Berikut didefinisikan modul bertingkat.

Definisi 5 [1] Diberikan ring R bertingkat tipe G . Modul M disebut modul bertingkat jika terdapat koleksi subgroup abelian dari M , katakan $\{M_g \mid g \in G\}$, sedemikian sehingga untuk setiap $g, h \in G$ memenuhi $M = \bigoplus_{g \in G} M_g$ dan $R_g M_h \subseteq M_{gh}$.

Setiap modul M selalu bisa dipandang sebagai ring bertingkat dengan $M_e = M$ dan $M_g = \{0\}$ untuk setiap $g \neq e$. Ring bertingkat dengan tingkatan semacam itu disebut ring bertingkat trivial. Himpunan $\{g \in G \mid M_g \neq \{0\}\}$ disebut support dari M dinotasikan dengan $\text{supp}(M, G)$. Elemen $r_g \in M_g$ disebut elemen homogen berderajat g . Himpunan $h(M) = \bigcup_{g \in G} R_g$ merupakan himpunan semua elemen homogen dari M .

Sama halnya dengan modul biasa, modul bertingkat juga memiliki submodul bertingkat. Berikut definisi dari submodul bertingkat.

Definisi 6 [1] Diberikan modul bertingkat M atas ring R tipe G dan dimisalkan N submodul dari M . Submodul N disebut submodul bertingkat tipe G jika $N = \bigoplus_{g \in G} N \cap M_g$.

Dalam modul biasa, penjumlahan dua submodul dan irisan dua submodul juga merupakan ideal. Sifat tersebut masih berlaku pada modul bertingkat. Lema berikut menyatakan sifat yang dimaksud.

Lema 7 [1] Diberikan modul bertingkat M atas R tipe G . Jika K dan L merupakan submodul bertingkat di M , maka $K + L$ dan $K \cap L$ masing-masing merupakan submodul bertingkat.

Definisi submodul maksimal dalam modul biasa juga berlaku pada modul bertingkat. Berikut merupakan definisi submodul bertingkat maksimal dalam modul bertingkat.

Definisi 8 [6] Diberikan ring bertingkat R tipe G dan M merupakan modul bertingkat atas ring R . Submodul bertingkat K disebut submodul maksimal jika $K \neq M$ dan jika terdapat K' merupakan submodul bertingkat atas R sehingga $K \subseteq K' \subseteq M$ maka $K = K'$ atau $K' = M$.

Selanjutnya, diberikan definisi penjumlah langsung bertingkat dari modul bertingkat.

Definisi 9 [3] Diberikan modul bertingkat M atas ring R tipe G dan N submodul bertingkat dari M . Submodul bertingkat N disebut penjumlah langsung bertingkat dari M jika terdapat submodul bertingkat L dari M sedemikian sehingga $M = N \oplus L$.

Selanjutnya, akan didefinisikan submodul murni bertingkat dari modul bertingkat.

Definisi 10 [7] Diberikan modul bertingkat M atas ring R tipe G . Suatu submodul bertingkat N dari M dikatakan submodul murni bertingkat jika untuk setiap $r \in h(R)$ berlaku $rN = N \cap rM$.

2.3 Homomorfisma modul bertingkat

Akan dijelaskan juga beberapa konsep yang berhubungan dengan homomorfisma modul bertingkat. Berikut ini diberikan definisi homomorfisma modul bertingkat.

Definisi 11 [1] *Diberikan modul bertingkat M dan N atas ring bertingkat R tipe G . Homomorfisma $f: M \rightarrow N$ disebut homomorfisma modul bertingkat berderajat $a \in G$ jika $f(M_g) \subseteq N_{ga}$.*

Homomorfisma modul bertingkat f yang tidak disebutkan derajatnya diartikan f berderajat e . Suatu homomorfisma bertingkat yang bersifat injektif disebut monomorfisma bertingkat. Homomorfisma bertingkat yang bersifat surjektif disebut epimorfisma. Homomorfisma bertingkat yang bersifat bijektif disebut isomorfisma.

Jika $f: M \rightarrow N$ merupakan homomorfisma modul bertingkat, maka $\text{Ker}(f)$ dan $\text{Im}(f)$ berturut-turut menjadi submodul bertingkat dari M dan N . Hal tersebut dijamin oleh proposisi di bawah ini.

Proposisi 12 [1] *Diberikan modul bertingkat M dan N atas ring R tipe G . Jika $f: M \rightarrow N$ merupakan homomorfisma modul bertingkat, maka $\text{Im}(f)$ dan $\text{Ker}(f)$ masing-masing merupakan submodul bertingkat dari N dan M .*

Selanjutnya, akan dibahas mengenai modul faktor bertingkat. Sebelum mendefinisikan modul faktor dijelaskan terlebih dahulu lema berikut.

Lema 13 [1] *Jika M modul bertingkat atas ring R tipe G dan N submodul bertingkat dari M , maka M/N modul bertingkat atas ring R tipe G dengan tingkatan $(M/N)_g = (M_g + N)/N$ untuk setiap $g \in G$ dan pemetaan natural $\phi: M \rightarrow M/N$ epimorfisma modul bertingkat.*

Modul bertingkat M/N atas ring R tipe G dengan tingkatan $(M/N)_g = (M_g + N)/N$ untuk setiap $g \in G$ disebut dengan modul faktor bertingkat dari M .

Berikut diberikan salah satu kondisi suatu pemetaan menjadi isomorfisma modul bertingkat.

Proposisi 14 [1] *Diberikan modul bertingkat M dan N atas ring R tipe G . Jika $f: M \rightarrow N$ merupakan homomorfisma modul bertingkat, maka pemetaan $f: M/\text{Ker}(f) \rightarrow \text{Im}(f)$ dengan $f(m + \text{Ker}(f)) = f(m)$ merupakan isomorfisma modul bertingkat.*

3 Hasil dan Pembahasan

Hasil penelitian yang diperoleh dibagi dalam tiga subbab. Pada subbab pertama dibahas tentang submodul maksimal bertingkat yang diawali dengan menjelaskan terkait dekomposisi submodul maksimal bertingkat. Pada subbab dua dibahas tentang homomorfisma bertingkat serta sifat-sifat yang berhubungan dengan homomorfisma bertingkat. Pada subbab tiga dibahas tentang penjumlahan langsung bertingkat serta sifat-sifat yang terkait dengan penjumlahan langsung bertingkat.

3.1 Submodul Maksimal Bertingkat

Sebelum dijelaskan sifat-sifat submodul maksimal bertingkat, terlebih dahulu akan dijelaskan beberapa teorema dan lema yang berkaitan dengan dekomposisi submodul maksimal bertingkat.

Teorema 15 [3] *Diberikan modul bertingkat M atas ring R tipe G dan submodul bertingkat N dari M atas ring R . Jika terdapat $h \in \text{supp}(M, G)$ sehingga*

$$N = \left(\bigoplus_{g \in G - \{h\}} M_g \right) \oplus K$$

dengan K submodul maksimal dari M_h atas R_e dan $\sum_{g \in G - \{h\}} R_{hg^{-1}} M_g \subseteq K$, maka N merupakan submodul maksimal bertingkat dari M atas R .

Bukti. Dimisalkan terdapat submodul bertingkat yang lain dari M atas ring R tipe G , katakan N' sehingga $N \subseteq N' \subseteq M$. Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned} N &\subseteq N' \subseteq M \\ \Rightarrow \left(\bigoplus_{g \in G - \{h\}} M_g \right) \oplus K &\subseteq \left(\bigoplus_{g \in G - \{h\}} M_g \right) \oplus K' \subseteq \left(\bigoplus_{g \in G - \{h\}} M_g \right) \oplus M_h. \end{aligned}$$

Karena K submodul maksimal dari M_h atas ring R_e , maka haruslah $K = K'$ atau $K' = M_h$. Jika $K = K'$ maka $N = N'$ dan jika $K' = M_h$ maka $N' = M_h$. Jadi, N merupakan submodul maksimal bertingkat dari M .

Lema berikut akan digunakan untuk membuktikan teorema-teorema berikutnya.

Lema 16 [3] *Jika M merupakan modul bertingkat atas ring R tipe G dan L submodul dari M_h atas R_e , maka $(\bigoplus_{g \neq h} M_g) \oplus L$ merupakan submodul bertingkat dari M atas ring R jika dan hanya jika L memuat $\sum_{g \in G - \{h\}} R_{hg^{-1}} M_g$.*

Bukti. ($\Rightarrow$) Diambil sebarang

$$x \in \sum_{g \in G - \{h\}} R_{hg^{-1}} M_g \subseteq \sum_{g \in G - \{h\}} R_{hg^{-1}} N \subseteq \sum_{g \in G - \{h\}} N = N.$$

Karena M modul bertingkat sehingga

$$x \in \sum_{g \in G - \{h\}} R_{hg^{-1}} M_g \subseteq \sum_{g \in G - \{h\}} M_h \subseteq M_h.$$

Karena komponen homogen dari N yang memuat elemen-elemen di M_h hanya berada di L sehingga haruslah $x \in L$. Dengan kata lain, $\sum_{g \in G - \{h\}} R_{hg^{-1}} M_g \subseteq L$.

($\Leftarrow$) Diambil sebarang $m \in N$ dan $r \in R$. Jika $m \in M_t$ untuk setiap $t \neq h \in G$ maka $r_g m \in R_g M_t \subseteq M_{gt}$ sehingga $r_g m \in M_{gt}$. Jika $gt \neq h$ maka $r_g m \in \bigoplus_{g \in G - \{h\}} M_g \subseteq N$. Jika $gt = h$ maka $g = ht^{-1}$ sehingga $r_g \in R_{ht^{-1}}$. Diperhatikan bahwa

$$r_g m \in R_{ht^{-1}} \subseteq \sum_{g \in G - \{h\}} R_{hg^{-1}} M_g \subseteq L \subseteq N.$$

Dengan demikian, N submodule dari M . Selanjutnya, untuk sebarang $g \in G - \{h\}$ diperoleh $N \cap M_g = M_g$ dan untuk $g = h \in G$ diperoleh $N \cap M_h = L$. Dengan demikian, $N = \bigoplus_{g \in G} (N \cap M_g)$. Jadi, N submodul bertingkat dari M .

Berikut Teorema yang menjelaskan konvers dari Teorema 15.

Teorema 17 [3] *Diberikan modul bertingkat M atas ring R tipe G dan N submodul maksimal bertingkat dari M atas ring R . Jika terdapat $h \in \text{supp}(M, G)$ dengan $N_h \neq M_h$ dan N_h memuat $\sum_{g \in G - \{h\}} R_{hg^{-1}} M_g$, maka N_h adalah submodul maksimal dari M_h atas R_e . Lebih lanjut*

$$N = \left(\bigoplus_{g \in G - \{h\}} M_g \right) \oplus N_h.$$

Bukti. Dimisalkan terdapat K_h submodul dari M_h atas ring R_e sehingga $N_h \subseteq K_h \subseteq M_h$. Berdasarkan Lema 16,

$$K = \left(\bigoplus_{g \in G - \{h\}} M_g \right) \oplus K_h$$

merupakan submodul bertingkat dari M atas ring R . Karena N submodul maksimal bertingkat, akibatnya $N = K$ atau $K = M$. Jika $N = K$ maka

$$\left(\bigoplus_{g \in G - \{h\}} M_g \right) \oplus N_h = \left(\bigoplus_{g \in G - \{h\}} M_g \right) \oplus K_h.$$

Diambil sebarang $x \neq 0 \in K_h$ akibatnya $x \notin \bigoplus_{g \in G - \{h\}} M_g$. Oleh karena itu, x haruslah di N_h . Jadi, $N_h = K_h$. Jika $K = M$ maka

$$\left(\bigoplus_{g \in G - \{h\}} M_g \right) \oplus K_h = \left(\bigoplus_{g \in G - \{h\}} M_g \right) \oplus M_h.$$

Diambil sebarang $x \neq 0 \in M_h$ akibatnya $x \notin \bigoplus_{g \in G - \{h\}} M_g$. Oleh karena itu, x haruslah di K_h . Jadi, $K_h = M_h$. Jadi, $K_h = M_h$. Dengan demikian, N_h merupakan submodul maksimal dari M_h atas ring R_e .

Berdasarkan Lema 16, N dapat dituliskan sebagai

$$N = \left(\bigoplus_{g \in G - \{h\}} M_g \right) \oplus N_h.$$

Selanjutnya, submodul maksimal bertingkat N dari M yang berbentuk

$$N = \left(\bigoplus_{g \in G - \{h\}} M_g \right) \oplus K$$

dengan K submodul maksimal dari M_h atas R_e dan $\sum_{g \in G - \{h\}} R_{hg^{-1}} M_g \subseteq K$ dan $h \in \text{supp}(M, G)$ disebut submodul maksimal bertingkat dari M atas R .

Berikut contoh aplikasi dari Teorema 15.

Contoh 18. Diberikan grup $G = (\mathbb{Z}, +)$ dan ring bertingkat

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & b \\ a_2 & a_1 & b \\ c & c & d \end{bmatrix} \mid a_1, a_2, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

dengan tingkatan

$$R_0 = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix} \mid a_1, a_2, d \in \mathbb{R} \right\}, R_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$R_{-1} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ c & c & 0 \end{bmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\}, R_n = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

untuk setiap $n \in \mathbb{Z} - \{-1, 0, 1\}$. Diberikan modul bertingkat atas R tipe $\mathbb{Z}$

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

dengan tingkatan

$$M_0 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\}, M_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\}, M_{-1} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, M_n = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

untuk setiap $n \in \mathbb{Z} - \{-1, 0, 1\}$. Dengan mengaplikasikan Teorema 15, diperoleh

$N = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ x \\ z \end{bmatrix} \mid x, z \in \mathbb{R} \right\}$ merupakan submodul maksimal bertingkat berderajat 1 dari M atas R .

Teorema berikut menjelaskan bahwa hanya terdapat satu komponen homogen dari submodul maksimal bertingkat yang memuat $\sum_{g \in G - \{h\}} R_{hg^{-1}} M_g$.

Teorema 19 [3] *Jika M merupakan modul bertingkat atas ring R tipe G dan N submodul maksimal bertingkat dari M atas ring R , maka terdapat paling banyak satu komponen homogen $N_h \neq M_h$ dari N dengan N_h memuat $\sum_{g \in G - \{h\}} R_{hg^{-1}} M_g$.*

Bukti. Diandaikan terdapat komponen homogen yang berbeda, katakan $N_h \neq M_h$ dan $N_{h'} \neq M_{h'}$, di mana $h, h' \in \text{supp}(M, G)$ dengan $\sum_{g \in G - \{h\}} R_{hg^{-1}} M_g \subseteq N_h$ dan $\sum_{g \in G - \{h'\}} R_{h'g^{-1}} M_g \subseteq N_{h'}$. Berdasarkan Teorema 17 diperoleh

$$\begin{aligned} N &= \left(\bigoplus_{g \in G - \{h\}} M_g \right) \oplus N_h = \left(\bigoplus_{g \in G - \{h'\}} M_g \right) \oplus N_{h'} \\ &\Rightarrow \left(\bigoplus_{g \in G - \{h, h'\}} M_g \right) \oplus M_{h'} \oplus N_h = \left(\bigoplus_{g \in G - \{h'\}} M_g \right) \oplus N_{h'}. \end{aligned}$$

Diambil sebarang $x \neq 0 \in M_{h'}$, akibatnya $x \notin \bigoplus_{g \neq h} M_g$ dan $x \notin N_h$ sehingga $M_{h'} \subseteq N_{h'}$, diperoleh $M_{h'} = N_{h'}$. Hal ini kontradiksi dengan asumsi bahwa $N_{h'} \neq M_{h'}$. Dengan kata lain, sebarang komponen homogen yang memuat $\sum_{g \in G - \{h\}} R_{hg^{-1}} M_g$ haruslah sama.

Setiap submodul maksimal bertingkat merupakan submodul maksimal. Namun, tidak semua submodul maksimal merupakan submodul maksimal bertingkat. Hal ini akan ditunjukkan melalui contoh berikut.

Contoh 20 Diberikan modul tidak sederhana M atas ring R . Dimisalkan $\Delta = \{(x, x) | x \in M\}$, maka Δ merupakan submodul maksimal dari $M \times M = \{(m_1, m_2) | m_1, m_2 \in M\}$ atas ring R . Selanjutnya, ring R dapat dipandang sebagai ring bertingkat dengan tingkatan trivial tipe $\mathbb{Z}_2$ dan $M \times M$ merupakan modul bertingkat atas ring R tipe $\mathbb{Z}_2$ dengan komponen homogen $M_0 = M \times \{0\}$ dan $M_1 = \{0\} \times M$. Himpunan Δ bukan merupakan submodul maksimal bertingkat tipe $\mathbb{Z}_2$ dari $M \times M$ atas ring R .

Oleh sebab itu, akibat berikut menjelaskan mengenai syarat perlu dan cukup suatu modul bertingkat memiliki submodul maksimal bertingkat.

Akibat 21 Suatu modul bertingkat M atas ring R tipe G memiliki setidaknya satu submodul maksimal bertingkat berderajat h jika dan hanya jika M_h memiliki setidaknya satu submodul maksimal atas ring R_e yang memuat $\sum_{g \in G - \{h\}} R_{hg^{-1}} M_g$.

Bukti. ($\Rightarrow$) Dimisalkan N submodul maksimal bertingkat dari M berderajat h . Berdasarkan Lema 16 dan Teorema 17, terdapat N_h submodul maksimal dari M_h atas ring R_e yang memuat $\sum_{g \in G - \{h\}} R_{hg^{-1}} M_g$. ($\Leftarrow$) Dimisalkan K merupakan submodul maksimal dari M_h atas ring R_e yang memuat $\sum_{g \in G - \{h\}} R_{hg^{-1}} M_g$. Berdasarkan Lema 16 dan Teorema 15, terdapat N submodul maksimal bertingkat dari M atas ring R berderajat h .

3.2 Homomorfisma Modul Bertingkat

Pada subbab ini akan dijelaskan sifat-sifat homomorfisma modul bertingkat. Jika diberikan suatu epimorfisma modul bertingkat, maka hasil pemetaan submodul maksimal bertingkat juga

merupakan submodul maksimal bertingkat. Dengan kata lain, epimorfisma modul bertingkat mengawetkan sifat kemaksimalan submodul bertingkat. Pernyataan tersebut akan dituliskan dalam teorema berikut.

Teorema 22 [3] *Diberikan modul bertingkat M dan $\bar{M}$ atas ring R tipe G . Jika $f: M \rightarrow \bar{M}$ epimorfisma bertingkat dan N submodul maksimal bertingkat dari M berderajat h sehingga $f(N) \neq \bar{M}$, maka $f(N)$ submodul maksimal bertingkat dari $\bar{M}$ berderajat h .*

Bukti. Karena N submodul maksimal berderajat h , berdasarkan Teorema 17 terdapat N_h submodul maksimal dari M_h atas ring R_e yang memuat $\sum_{g \in G - \{h\}} R_{hg^{-1}} M_g$ dan $N_g = M_g$ untuk setiap $g \neq h \in G$. Akan ditunjukkan $f(N_h)$ submodul maksimal dari M_h atas ring R_e . Karena f epimorfisma dan $f(N) \neq \bar{M}$ berakibat $f(N_h) \neq \bar{M}_h$. Dimisalkan terdapat L submodul dari $\bar{M}$ atas ring R_e sehingga $f(N_h) \subseteq L \subseteq \bar{M}$. Karena f epimorfisma bertingkat, terdapat submodul $f^{-1}(L)$ dari M_h sehingga $N_h \subseteq f^{-1}(L) \subseteq M_h$. Karena N_h submodul maksimal bertingkat akibatnya $N_h = f^{-1}(L)$ atau $f^{-1}(L) = M_h$. Jika $N_h = f^{-1}(L)$ maka $f(N_h) = f(f^{-1}(L)) = L$ sedangkan jika $f^{-1}(L) = M_h$ maka $L = f(f^{-1}(L)) = f(M_h) = M_h$. Dengan demikian, $f(N_h)$ merupakan submodul maksimal dari $\bar{M}_h$ atas ring R_e . Selanjutnya, diperhatikan bahwa

$$\sum_{g \in G - \{h\}} R_{hg^{-1}} \bar{M}_g = \sum_{g \in G - \{h\}} R_{hg^{-1}} f(M_g) = f\left(\sum_{g \in G - \{h\}} R_{hg^{-1}} M_g\right) \subseteq f(N_h).$$

Berdasarkan Teorema 15 diperoleh bahwa $f(N)$ merupakan submodul maksimal bertingkat dari $\bar{M}$ berderajat h .

Selanjutnya, teorema berikut menjelaskan sifat-sifat modul sederhana bertingkat jika $\text{Ker}(f)$ menjadi submodul maksimal bertingkat.

Teorema 23 *Diberikan modul bertingkat M dan $\bar{M}$ atas ring R tipe G dan $f: M \rightarrow \bar{M}$ epimorfisma bertingkat. Jika $\text{Ker}(f)$ submodul maksimal bertingkat dari M pada suatu derajat, maka $\bar{M}$ merupakan modul sederhana bertingkat.*

Bukti. Berdasarkan Teorema 22, $f(\text{Ker}(f)) = \{\bar{0}\}$ menjadi submodul maksimal bertingkat dari M pada suatu derajat yang sama dengan derajat $\text{Ker}(f)$. Karena $\{\bar{0}\}$ submodul maksimal bertingkat dari M artinya tidak ada submodul lain dari M yang memuat $\{\bar{0}\}$ secara sejati selain M itu sendiri. Oleh karena itu, M merupakan modul sederhana bertingkat.

Berikut diberikan definisi modul siklik bertingkat.

Definisi 24 *Suatu modul bertingkat atas ring R tipe G disebut modul siklik bertingkat jika $M = Rm$ dengan $m \in h(M)$.*

Dalam [8] telah dijelaskan bahwa setiap modul sederhana merupakan modul siklik. Akan ditunjukkan sifat tersebut masih berlaku dalam modul bertingkat. Selanjutnya, lema berikut digunakan untuk membuktikan akibat berikutnya.

Lema 25 *Jika M modul sederhana bertingkat atas ring R tipe G maka M merupakan modul siklik bertingkat.*

Bukti. Diambil sebarang elemen $m \neq 0 \in h(M) \subseteq M$. Karena $m \neq 0$ sehingga terdapat setidaknya satu elemen homogen $m_k \neq 0 \in M_k$ untuk suatu $k \in G$. Dibentuk submodul dari M , katakan $N = Rm_k \neq \{0\}$. Karena M modul sederhana bertingkat sehingga $N = M$. Dengan kata lain, M dibangun oleh oleh satu komponen dari M . Jadi, M merupakan modul siklik bertingkat.

Berikut akibat dari Teorema 23 dan Lema 25.

Akibat 26 *Diberikan modul bertingkat M dan $\bar{M}$ atas ring R tipe G dan $f: M \rightarrow \bar{M}$ epimorfisma bertingkat. Jika $\text{Ker}(f)$ submodul maksimal bertingkat dari M pada suatu derajat, maka $\bar{M}$ merupakan modul siklik bertingkat.*

Bukti. Berdasarkan Teorema 23, diperoleh $\bar{M}$ merupakan modul sederhana bertingkat. Lebih lanjut, berdasarkan Lema 25, diperoleh $\bar{M}$ merupakan modul siklik bertingkat.

Selanjutnya, akan dijelaskan mengenai syarat cukup submodul maksimal bertingkat dari modul faktor bertingkat. Pernyataan tersebut dituliskan dalam teorema berikut.

Teorema 27 [3] *Diberikan modul bertingkat M atas ring R tipe G dan N submodul bertingkat dari M atas ring R . Jika L submodul maksimal bertingkat dari M atas ring R berderajat $h \in G$, maka $(L + N)/N$ merupakan submodul maksimal bertingkat dari M/N atas ring R berderajat h .*

Bukti. Diambil epimorfisma natural bertingkat $\varphi: M \rightarrow M/N$. Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \varphi(L) &= L/N \\ &= \bigoplus_{g \in G} (L/N)_g \\ &= \bigoplus_{g \in G} (L_g + N)_g / N \\ &= \left(\bigoplus_{g \in G} L_g + N \right) / N \\ &= (L + N)/N. \end{aligned}$$

Karena L submodul maksimal bertingkat dari M , berdasarkan Teorema 22, $\varphi(L) = (L + N)/N$ menjadi submodul maksimal bertingkat dari M/N atas ring R tipe G berderajat h .

Jika modul faktor bertingkat dibentuk dengan submodul maksimal bertingkat, maka modul faktor bertingkat tersebut menjadi beberapa sifat berikut.

Teorema 28 [3] *Diberikan modul bertingkat M atas ring R tipe G . Jika N submodul maksimal dari M berderajat h , maka M/N modul sederhana bertingkat dan $M/N \cong M_h/N_h$ sebagai modul atas ring R_e .*

Bukti. Diambil epimorfisma natural bertingkat $\varphi: M \rightarrow M/N$. Karena N submodul maksimal bertingkat dari M , berdasarkan Teorema 22, $\varphi(N) = N/N = N$ menjadi submodul maksimal bertingkat dari M/N berderajat h . Karena N submodul maksimal bertingkat dari M/N artinya tidak ada submodul lain dari M/N yang memuat N secara sejati selain M/N itu sendiri. Oleh karena itu, M/N merupakan modul sederhana bertingkat. Selanjutnya, karena N submodul maksimal dari M berderajat h diperoleh $M_g = N_g$ untuk setiap $g \neq h \in G$. Diperhatikan bahwa

$$M/N = \bigoplus_{g \in G} (M/N)_g \cong \bigoplus_{g \in G} M_g/N_g = M_h/N_h.$$

Dengan demikian, $M/N \cong M_h/N_h$ sebagai modul atas ring R_e .

Berikut diberikan definisi dari modul torsi bertingkat dan modul bebas torsi bertingkat.

Definisi 29 [9] *Diberikan M modul bertingkat atas ring R tipe G . Elemen $m \in h(M)$ disebut elemen torsi jika terdapat elemen $r \neq 0 \in h(R)$ sehingga $rm = 0$. Modul bertingkat M atas ring R tipe G disebut modul torsi bertingkat jika setiap elemen $m \in h(M)$ merupakan elemen torsi. Modul bertingkat M disebut modul bebas torsi bertingkat atas ring R jika untuk setiap $r \in h(R)$ dan $m \neq 0 \in h(M)$ dengan $rm = 0$ berakibat $r = 0$.*

Selanjutnya, jika modul faktor bertingkat M/N dengan M modul bebas torsi bertingkat dan N submodul maksimal bertingkat, maka dapat ditunjukkan syarat perlu dan cukup agar M/N menjadi modul torsi bertingkat.

Teorema 30 *Diberikan modul bebas torsi bertingkat M atas R tipe G dan N submodul maksimal bertingkat dari M berderajat $h \in \text{supp}(M, G)$. M/N modul torsi bertingkat atas R jika dan hanya jika M_h/N_h modul torsi atas R_e .*

Bukti. ($\Rightarrow$) Diambil sebarang $m_h + N_h \in M_h/N_h$ dengan $m_h \in M_h$. Karena M/N modul torsi bertingkat atas R artinya setiap elemen homogen dari M/N adalah elemen torsi. Dipandang elemen torsi berderajat h , yaitu $m_h + N$ dengan $m_h \neq 0 \in M_h$, artinya terdapat $r_e \neq 0 \in R_e \subseteq R$ sehingga

$$r_e(m_h + N) = N \Rightarrow r_e m_h + N = N$$

akibatnya $r_e m_h \in N$. Karena M modul bebas torsi bertingkat $r_e m_h \neq 0$ berderajat h , sehingga $r_e m_h \in N_h$ dengan demikian

$$r_e m_h + N_h = N_h \Rightarrow r_e(m_h + N_h) = N_h.$$

Jadi, M_h/N_h merupakan modul torsi atas R_e .

($\Leftarrow$) Diambil sebarang elemen homogen $m_g + N \in M/N$ dengan $m_g \neq 0 \in M_g$ untuk setiap $g \in G$. Karena N submodul maksimal bertingkat berderajat h sehingga $M_g = N_g$, akibatnya untuk setiap $g \in G - \{h\}$ diperoleh elemen homogen $m_g + N$ merupakan elemen torsi di M/N . Dipandang untuk $g = h \in G$, akan ditunjukkan elemen homogen $m_h + N \in M/N$ dengan $m_h \in M_h$ merupakan elemen torsi. Karena M_h/N_h modul torsi atas R_e dan $N_h \subseteq N$ terdapat $r_e \neq 0 \in R_e \subseteq R$ sehingga

$$r_e m_h + N = N \Rightarrow r_e(m_h + N) = N.$$

Dengan demikian M/N merupakan modul torsi bertingkat.

Berikut aplikasi dari Teorema 30.

Contoh 31. Diberikan ring bertingkat $R = \mathbb{Z}$ dengan tingkatan trivial tipe $\mathbb{Z}_2$. Himpunan $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ merupakan modul bertingkat atas ring R dengan tingkatan $M_0 = \mathbb{Z} \times \{0\}$ dan $M_1 = \{0\} \times \mathbb{Z}$. Lebih lanjut, M merupakan modul bebas torsi bertingkat. Himpunan $N_0 = 2\mathbb{Z} \times \{0\}$ merupakan submodul maksimal dari M_0 atas ring R_e sehingga diperoleh $N = 2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ menjadi submodul maksimal bertingkat berderajat 0. Diambil sebarang $m_0 + N_0 \in M_0/N_0$. Karena $m_0 \in M_0$ artinya $m_0 = (a, 0)$ dengan $a \in \mathbb{Z}$. Dipilih $2 \in R_0 = \mathbb{Z}$. Diperhatikan bahwa

$$2m_0 = 2(a, 0) = (2a, 0) \in N_0.$$

Karena $2m_0 \in N_0$ sehingga

$$2m_0 + N_0 = N_0 \Rightarrow 2(m_0 + N_0) = N_0.$$

Dengan demikian, M_0/N_0 merupakan modul torsi atas ring R_0 . Berdasarkan Teorema 30, diperoleh M/N merupakan modul torsi bertingkat atas ring R .

3.3 Penjumlahan Langsung Bertingkat

Pada subbab ini akan dijelaskan sifat-sifat penjumlahan langsung bertingkat dari modul bertingkat.

Jika suatu penjumlahan langsung bertingkat sekaligus submodul maksimal bertingkat, maka diperoleh beberapa sifat dalam teorema berikut.

Teorema 32 [3] *Diberikan modul bertingkat M atas ring R tipe G dan N submodul maksimal bertingkat dari M berderajat $h \in G$.*

(i) *Jika N penjumlahan langsung bertingkat dari M , katakan $M = N \oplus L$, maka L submodul sederhana dari M_h atas ring R_e .*

(ii) *N penjumlahan langsung dari M jika dan hanya jika N_h penjumlahan langsung dari M_h .*

Bukti. (i) Karena N submodul maksimal bertingkat dari M akibatnya $M_g = N_g$ untuk setiap $g \in G - \{h\}$. Dengan demikian, untuk setiap $g \in G - \{h\}$ berlaku

$$M_g = N_g \oplus L_g \Rightarrow M_g = M_g \oplus L_g$$

akibatnya, $L_g = \{0\}$ sehingga

$$L = \bigoplus_{g \in G} L_g = L_h.$$

Hal ini menunjukkan bahwa $L = L_h$ merupakan submodul dari M_h atas ring R_e . Selanjutnya, diambil homomorfisma modul $f: M \rightarrow L$ dengan definisi $f(m) = f(n + l) = l$. Dengan homomorfisma tersebut diperoleh $\text{Ker}(f) = N$ dan $\text{Im}(f) = L$. Berdasarkan Teorema Utama Homomorfisma Modul, diperoleh $M/N \cong L$. Berdasarkan Teorema 28, diperoleh $L \cong M/N \cong M_h/N_h$ submodul sederhana dari M_h atas ring R_e .

(ii)($\Rightarrow$) Karena N penjumlah langsung dari M artinya terdapat submodul bertingkat L sehingga $M = N \oplus L$. Diperhatikan bahwa $M = N \oplus L \Rightarrow M_g = N_g \oplus L_g$ untuk setiap $g \in G$. Dengan demikian, untuk $h \in G$ berlaku $M_h = N_h \oplus L_h$. Dengan kata lain, N_h menjadi penjumlah langsung dari M_h . ($\Leftarrow$) Dipilih submodul bertingkat L dari M dengan tingkatan $L_g = \{0\}$ untuk setiap $g \neq h \in G$ dan $L_h = L$ untuk $h \in G$. Dengan demikian

$$N \oplus L = \left(\bigoplus_{g \in G - \{h\}} M_g \right) \oplus N_h \oplus L_h = \left(\bigoplus_{g \in G - \{h\}} M_g \right) \oplus M_h = M.$$

Oleh karena itu, N menjadi penjumlah langsung bertingkat dari M .

Dalam [10] dijelaskan bahwa setiap penjumlah langsung merupakan submodul murni. Berikut teorema yang menjelaskan sifat tersebut masih berlaku dalam modul bertingkat.

Teorema 33 *Diberikan modul bertingkat M atas ring R tipe G . Jika N penjumlah langsung bertingkat dari M , maka N merupakan submodul murni bertingkat.*

Bukti. Diambil sebarang $r \in h(R)$, akan ditunjukkan $rN = N \cap rM$. Diambil sebarang $rn \in rN$ untuk $n \in N$. Diperhatikan bahwa $rn \in N$ dan $rn \in rN \subseteq rM$. Dengan demikian, diperoleh $rn \in N \cap rM$. Dengan kata lain, $rN \subseteq N \cap rM$. Selanjutnya, diambil sebarang $x \in N \cap rM$, artinya $x \in N$ dan $x \in rM$. Karena $x \in rM$ sehingga $x = rm$ untuk $m \in M$. Karena N penjumlah langsung bertingkat dari M artinya terdapat submodul bertingkat L dari M sedemikian sehingga $M = N \oplus L$. Oleh karena itu, sebarang $m \in M$ dapat dinyatakan sebagai $m = n + l$ untuk suatu $n \in N$ dan $l \in L$. Diperhatikan bahwa

$$x = rm \Rightarrow x = r(n + l) \Rightarrow x = rn + rl$$

dengan $rn \in rN \subseteq N$ dan $rl \in rL \subseteq L$. Karena $x \in N$ dan $rn \in N$ sehingga $rl = x - rn \in N$. Dengan demikian, $rl \in L \cap N$. Namun, $N \cap L = \{0\}$ sehingga haruslah $rl = 0$. Dengan demikian, diperoleh

$$x = rn + rl = rn + 0 = rn \in rN.$$

Oleh karena itu, $N \cap rM \subseteq rN$. Dengan kata lain, $rN = N \cap rM$. Jadi, submodul bertingkat N merupakan submodul murni bertingkat.

Selanjutnya, jika homomorfisma modul bertingkat $f = f^2$ (idempoten), maka $Im(f)$ menjadi penjumlah langsung bertingkat.

Teorema 34 Diberikan modul bertingkat M atas ring R tipe G . Jika $f: M \rightarrow M$ homomorfisma modul bertingkat di suatu derajat tertentu dengan $f^2 = f$, maka $Im(f)$ menjadi penjumlah langsung bertingkat dari M . Lebih lanjut, $M = Im(f) \oplus Ker(f)$.

Bukti. Diambil sebarang $m \in M$ diperoleh $f(m) \in Im(f)$. Akan ditunjukkan $m - f(m) \in Ker(f)$. Diperhatikan bahwa

$$f(m - f(m)) = f(m) - f(f(m)) = f(m) - f^2(m) = f(m) - f(m) = 0.$$

Hal tersebut menunjukkan bahwa $m - f(m) \in Ker(f)$. Dengan demikian, diperoleh

$$m = f(m) + (m - f(m)) \in Im(f) + Ker(f).$$

Dengan kata lain, $M = Im(f) + Ker(f)$. Selanjutnya, Karena $x \in Im(f)$, sehingga $x = f(m)$ untuk suatu $m \in M$. Karena $x \in Ker(f)$, sehingga $f(x) = 0$. Diperhatikan bahwa

$$0 = f(x) = f(f(m)) = f^2(m) = f(m) = x.$$

Dengan demikian, diperoleh $x = 0$. Dengan kata lain, $Im(f) \cap Ker(f) = \{0\}$. Hal ini menunjukkan bahwa $M = Im(f) \oplus Ker(f)$. Karena terdapat $Ker(f)$ submodul bertingkat dari M sehingga dapat disimpulkan bahwa $Im(f)$ merupakan penjumlah langsung bertingkat dari M .

Contoh 35. Diberikan ring bertingkat R tipe $\mathbb{Z}_2$

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

dengan tingkatan

$$R_0 = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \mid a, d \in \mathbb{R} \right\}, R_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \mid b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Diberikan juga modul bertingkat M atas ring R

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} \text{ dengan tingkatan } M_0 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}, M_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Homomorfisma modul bertingkat

$$f: M \rightarrow M$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$$

bersifat $f^2 = f$ sehingga berdasarkan Teorema 34, diperoleh $M = Im(f) \oplus Ker(f)$.

4 Simpulan

Dengan dekomposisi yang diberikan dapat didefinisikan submodul maksimal bertingkat berderajat tertentu. Hasil pemetaan submodul maksimal bertingkat berderajat h melalui suatu epimorfisma modul bertingkat berderajat e masih menjadi submodul maksimal bertingkat berderajat h . Setiap modul sederhana bertingkat merupakan modul siklik bertingkat. Modul faktor yang terbentuk dari modul bertingkat dan submodul maksimal bertingkat pada suatu derajat merupakan modul sederhana bertingkat. Setiap penjumlah langsung bertingkat merupakan submodul murni bertingkat. Jika f suatu homomorfisma modul bertingkat di suatu derajat tertentu bersifat idempoten maka $Im(f)$ menjadi penjumlah langsung bertingkat. Untuk mengetahui suatu modul faktor bertingkat M/N merupakan modul torsi bertingkat atas ring R cukup ditunjukkan modul faktor M_h/N_h merupakan modul torsi atas ring R_e . Untuk mengetahui suatu submodul maksimal bertingkat N menjadi penjumlah langsung bertingkat dari M atas ring R cukup ditunjukkan N_h penjumlah langsung dari M_h atas ring R_e .

5 Daftar Pustaka

- [1] Paul E. Bland, *Rings and Theirs Modules*, Walter de Gruyter and Co. KG, Berlin New York, 2011.
- [2] Constantin Nastasescu and Freddy V. Oystaeyen, *Graded Ring Theory*, Mathematical Library 28, North Holland, Amsterdam, 1982.
- [3] Fida Moh'D, "Decompositions of Graded Maximal Submodules," *Commun. Korean Math. Soc.* 37, No. 1, pp.1-15, 2022, <https://doi.org/10.4134/CKMS.c200428>
- [4] Fida Moh'D and Maisa Khader., "Graded Modules Over First Strongly Graded," *Malaysian Journal of Mathematical Science* 11(2): 205-220, 2017 <https://qsj-waf.upm.edu.my/fullpaper/2017-May-11-2/Fida,%20M.-205-220.pdf>
- [5] Assarrar, A., On Graded-(m,n)-prime submodules of graded modules. *Journal of Algebra and Its Applications*, 2025, <https://dx.doi.org/10.1142/S0219498826502622>.
- [6] Peyman Ghiasvand and Farkhonde Farzalipour, "Notes on the Graded Radical of Graded Submodules," *Int. J. Contemp. Math. Science*, Vol. 6, no. 5, 249-253, 2011, <https://www.m-hikari.com/ijcms-2011/5-8-2011/ghiasvandIJCMS5-8-2011.pdf>
- [7] Shahabaddin Ebrahimi Atani, "On Graded Prime Submodules," *Chiang Mai J. Sci.*, 33(1):3-7, 2005, <https://www.thaiscience.info/journals/Article/CMJS/10905812.pdf>
- [8] William A. Adkins and Steven H. Weintraub, *Algebra An Approach via Module Theory*, Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1992

- [9] Al-Azaizeh, M., & Al-Zoubi, K., Some Properties on gr-n-submodules. *Quasigroups and Related System*, 2025, <https://doi.org/10.56415/qrs.v33.01>.
- [10] Cary Webb, "Decomposition of Graded Modules," *Proceeding of the American Mathematical Society*, Volume 94, Number 4, 1985, <https://doi.org/10.2307/2044864>