Limits: Journal of Mathematics and Its Applications
E-ISSN: 2579-8936
P-ISSN: 1829-605X
Vol. 23, No. 1, Maret 2026, 45-55
DOI: https://doi.org/10.12962/limits.v23i1.7683

Bilangan Pembeda Tanpa Titik Terisolasi Graf $\boldsymbol{W_n \odot K_1}$ dan $\boldsymbol{F_n \odot K_1}$

Wahyuni Abidin [1] *, Ismail Mulia Hasibuan [2], Try Azisah Nurman [3], Muhammad Ridwan [4]
[1,3,4]Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Alauddin Makassar,
Jl. H. M. Yasin Limpo No 36 Gowa, Sulawesi Selatan, 92118, Indonesia
[2]Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau,
Jl. HR. Subrantas KM 15 Kecamatan Tuah Madani Kota Pekanbaru, Kodepos 28293
wahyuniabidin@uin-alauddin.ac.id

Diajukan: 27 Juli 2025, Diperbaiki: 10 Maret 2026, Diterima: 1 April 2026

Abstrak

Misalkan G adalah suatu graf dan $B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ adalah subhimpunan terurut dari himpunan titik graf G. Representasi suatu titik x di G terhadap B didefinisikan sebagai $r(x|B) := (d(x, b_1), d(x, b_2), \dots, d(x, b_k))$, dengan $d(x, b_i)$ adalah jarak titik u dan b_i, untuk semua $1 \le i \le k$. Himpunan B disebut himpunan pembeda G apabila representasi setiap titik di G berbeda. Suatu himpunan pembeda dengan kardinalitas terkecil disebut basis G. Kardinalitas basis G adalah dimensi metrik graf G. Suatu titik x di G dikatakan titik terisolasi jika tidak ada sisi yang terkait pada x. Himpunan pembeda B disebut sebagai himpunan pembeda tanpa titik terisolasi, disingkat himpunan-pti, apabila subgraf yang diinduksi oleh B tidak memiliki titik terisolasi. Suatu himpunan-pti dengan kardinalitas terkecil dinamakan basis-pti G dan banyak anggotanya disebut bilangan pembeda tanpa titik terisolasi dari G atau bilangan-pti G, dinotasikan $nr(G)$.

Dalam makalah ini, dibahas bilangan-pti suatu graf yang diperoleh dari hasil operasi korona antara dua graf. Graf G korona graf H, dinotasikan dengan $G \odot H$, adalah suatu graf yang diperoleh dengan mengambil sebuah salinan G dan salinan H sebanyak titik graf G, kemudian menghubungkan setiap titik dari salinan ke-k graf H dan sebuah titik ke-k di G. Hasil penelitian menunjukkan bahwa jika G adalah graf roda atau graf kipas, maka bilangan-pti dari graf hasil operasi korona $G \odot K_1$ bergantung pada banyaknya titik pada graf tersebut.

Kata Kunci: Himpunan pembeda, himpunan pembeda tanpa titik terisolasi, bilangan pembeda tanpa titik terisolasi, graf operasi korona, dimensi metrik

Abstract

Let G be a graph and $B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ be an ordered subset of the vertex set og graph G. The representation of a vertex x in G with respect to B is defined as $r(x|B) := \big(d(x, b_1), d(x, b_2), \dots, d(x, b_k)\big)$, where $d(x, b_i)$ is the distance between vertex x and b_i for all \$1 $\le i \le k$. The set B is called a resolving set of G if the representation of every vertex in G is distinct. A resolving set with the minimum cardinality is called a basis of G and the cardinality of a basis of G is the metric dimension of the graph G. A vertex x in G is called an isolated vertex if there are no edges incident to x. A resolving set B is called a non-isolated resolving set if the subgraph induced by B does not contain isolated vertices. A non-isolated resolving set with the minimum cardinality is called an nr-basis of G, and the number of its members is called the non-isolated resolving number of G, nonated by $nr(G)$.

In this paper, we discuss non-isolated resolving numbers of a graph obtained from the corona product of two graphs. The corona product of graph G and graph H, denoted by $G \odot H$, is a graph obtained by taking one copy of G and as many copies of H as there are vertices in G, then connecting every vertex from the k-th copy of H to the k-th vertex in G. The results show that if G is a wheel graph or a fan graph, then

the non-isolated resolving number of the corona product $G \odot K_1$ depends on the number of vertices in the graph.
Keywords: *Resolving set, non-isolated resolving set, non-isolated resolving number, corona graph, metric dimension*

1 Pendahuluan

Semua graf yang dibahas dalam makalah ini merupakan graf yang terhubung, berhingga, dan sederhana. Konsep mengenai *himpunan pembeda* dalam graf pertama kali diperkenalkan secara terpisah oleh Slater, serta Harary dan Melter, walaupun mereka menggunakan istilah yang berbeda. Slater menyebut konsep ini sebagai *himpunan lokasi* [1], sedangkan Harary dan Melter menamainya sebagai *himpunan pembeda* [2]. Himpunan pembeda yang memiliki banyak anggota paling sedikit disebut *himpunan pembeda minimum*. Slater menyebut himpunan pembeda minimum sebagai *bilangan lokasi*, selanjutnya Harary dan Melter menyebutnya sebagai *dimensi metrik*. Penelitian ini menggunakan istilah yang diperkenalkan oleh Harary dan Melter pada tahun 1976.

Dimensi metrik dapat diterapkan untuk menyelesaikan permasalahan di berbagai bidang, termasuk navigasi robot pada jaringan [3], identifikasi senyawa kimia [4], optimasi kombinatorik [5], dan optimalisasi penempatan sensor deteksi ancaman [6]. Beberapa hasil terkait dimensi metrik telah diperoleh. Chartrand dkk. memberikan batas bawah dan batas atas untuk dimensi metrik dari suatu graf berdasarkan orde dan diameternya [4]. Selain itu, mereka juga mengkarakterisasi semua graf terhubung G dengan n titik yang memiliki dimensi 1, yaitu graf lintasan. Mereka juga mengkarakterisasi seluruh graf G dengan n titik yang memiliki dimensi $n-1$ atau $n-2$. Misalkan G adalah graf terhubung dengan orde $n \geq 2$, $\dim(G) = n-1$ jika dan hanya jika G adalah graf lengkap. Selanjutnya, misalkan G adalah graf terhubung dengan orde $n \geq 4$, $\dim(G) = n-2$ jika dan hanya jika G adalah salah satu dari graf $K_{r,s}$ dengan $r, s \geq 1$, atau $G = \mathrm{K_r} + \overline{K_s}$ dengan $r, s \geq 1$, atau $G = \mathrm{K_r} + \overline{K_s}$ dengan $r \geq 1$ dan $s \geq 2$, atau $G = \mathrm{K_r} + (K_1 \cup K_s)$ dengan $r, s \geq 1$. Dalam makalah yang berbeda, Ba$\check{c}a$ dkk. menunjukkan dimensi metrik untuk graf bipartit regular-$(n-1)$, untuk $n \geq 3$. Selain itu, mereka juga menentukan dimensi metrik dari graf $K_{m,m} - E(C_{2m})$ [7].

Konsep bilangan-pti di perkenalkan oleh Chitra dan Arumugam [8]. Hasil-hasil mengenai himpunan pembeda tanpa titik terisolasi untuk graf-graf khusus mencakup graf *double broom* [9], graf *splitting* [10], graf *stack of books*, graf *prism*, dan graf *shack* [11], serta graf *cycle books* [12]. Sementara itu, beberapa peneliti sebelumnya telah mempelajari himpunan pembeda tanpa titik terisolasi dari graf operasi. Hasibuan *dkk*. menentukan himpunan pembeda tanpa titik terisolasi dari graf operasi Kartesius G tertentu dengan G adalah graf lintasan [13], dan graf lengkap [14].

Chitra dan Arumugam (2015) telah menentukan bilangan-pti dari operasi korona antara graf terhubung G dengan graf $\overline{K_2}$ untuk setiap graf G. Selanjutnya, Alfarisi dkk. memberikan bilangan-pti dari operasi korona antara graf terhubung G dengan graf mK_1 dimana $m \geq 2$ dan G adalah graf lengkap, graf lintasan, atau graf siklus [15]. Dalam makalah yang berbeda, Alfarisi dkk. [16] memberikan bilangan-pti dari operasi korona antara graf terhubung H dengan graf K_1, dimana H adalah graf lengkap, graf lintasan, graf siklus, atau graf bintang.

Oleh karena itu, dalam makalah ini, akan melanjutkan studi mengenai bilangan-pti dari operasi korona antara graf terhubung H dengan graf K_1, di mana H adalah graf roda dan graf kipas.

2 Metode Penelitian

Pertama yang dilakukan pada penelitian ini yakni melakukan tinjauan pustaka yang berkaitan dengan materi himpunan pembeda dan bilangan-pti. Langkah ini krusial untuk memvalidasi posisi penelitian di antara temuan-temuan sebelumnya sehingga orisinalitas masalah yang diangkat tetap terjaga.

Objek kajian utama adalah penentuan bilangan-pti dari operasi korona dari graf roda atau graf kipas dengan graf $\boldsymbol{K_1}$. Pembuktiannya dibagi menjadi dua kasus:

2.1 Penentuan batas bawah

Batas bawah untuk bilangan-pti ditentukan menggunakan pendekatan metode kontradiksi dengan memanfaatkan sifat-sifat khas dari graf roda, graf kipas, dan sifat-sifat dari graf operasi korona.

2.2 Menentukan batas atas

Penetapan batas atas dilakukan melalui konstruksi langsung. Langkah-langkahnya meliputi.

i. Mendefinisikan himpunan titik dan sisi dari graf kipas korona dengan suatu titik, begitu pula halnya untuk graf roda korona dengan suatu titik.
ii. Mengkonstruksi calon himpunan-pti dengan jumlah anggota yang diupayakan identik dengan nilai batas bawah.
iii. Melakukan validasi melalui pemetaan representasi jarak untuk memastikan setiap titik dalam graf memiliki kode posisi yang unik.

3 Hasil dan Pembahasan

Penelitian akan menentukan bilangan-pti graf $G \odot K_1$ dengan G adalah graf roda W_n dan graf kipas F_n. Graf roda dengan $n + 1$ titik adalah graf yang didapat dari graf siklus C_n dengan menambahkan satu titik disebut titik pusat, sehingga titik tersebut bertetangga dengan semua titik di C_n yang disimbolkan dengan $W_n = C_n + K_1$. Graf kipas dengan $n + 1$ titik adalah graf yang diperoleh dari graf lintasan P_n dengan menambahkan satu titik, sehingga titik tersebut bertetangga dengan semua titik di P_n yang disimbolkan dengan $F_n = P_n + K_1$. Perlu diingat kembali bahwa graf operasi tambah dari H_1 dan H_2, dinotasikan $H_1 + H_2$, adalah graf dengan himpunan titik $V(H_1 + H_2) = V(H_1) \cup V(H_2)$ dan himpunan sisi $E(H_1 + H_2) = E(H_1) \cup E(H_2) \cup \{uv | u \in V(H_1), v \in V(H_2)\}$.

Pada tahun 2013, Saputro dkk. telah membuktikan bahwa jika G adalah graf terhubung, maka terdapat basis S dari $K_1 + G$ sehingga S berasal dari titik G.

Lema 1. [17]

Misalkan G adalah graf terhubung, maka terdapat basis S dari $K_1 + G$ sehingga $S \subseteq V(G)$.

Pada makalah yang berbeda, Abidin W dkk. telah membuktikan bahwa jika G adalah graf lintasan atau graf siklus berlaku setiap basis dari $K_1 + G$ memuat titik terisolasi.

Lema 2. [18]

Untuk $n \geq 7$, misalkan G adalah graf lintasan atau graf siklus berlaku setiap basis dari $K_1 + G$ memuat titik terisolasi.

Selain itu, Abidin W. membuktikan bahwa jika H adalah graf terhubung, maka terdapat suatu himpunan-nr W dari $H \odot K_1$ sehingga W berasal dari $V(H)$.

Lema 3. [19]

Misalkan H adalah graf terhubung berorde $n \geq 2$. Terdapat suatu himpunan-nr W dari $H \odot K_1$ sehingga $W \subseteq V(H)$.

Misalkan graf $H \odot K_1$ dengan H adalah graf roda $C_n + K_1$ atau graf kipas $P_n + K_1$. Berdasarkan Lema 3, jika H adalah graf terhubung, maka terdapat suatu himpunan-nr W dari $H \odot K_1$ sehingga W berasal dari $V(H)$. Sedangkan, berdasarkan Lema 1 bahwa terdapat basis S dari $G + K_1$ sehingga S berasal dari $V(G)$. Dalam hal ini, G adalah graf lintasan atau graf siklus. Oleh karena itu, akan ditentukan terlebih dahulu basis dari graf G. Untuk menentukan basis dari graf G digunakan teknik gap diantara dua titik. Misalkan R subset dari $V(G)$. Misalkan u dan v dua titik berbeda di R. Suatu gap dari R antara u dan v didefinisikan $V\big(P(u, v)\big) - \{u, v\}$ dengan $P(u, v)$ adalah suatu lintasan $u - v$ di C_n atau P_n yang semua sisinya tidak di R. Titik-titik u dan v disebut titik ujung dari suatu gap antara u dan v. Jika dua gap yang berbeda di R mempunyai suatu titik ujung yang sama, maka kedua gap tersebut disebut tetangga gap. Untuk kasus siklus, jika $|R| = r$ maka R mempunyai r gap dengan beberapa gap mungkin kosong. Untuk kasus lintasan, jika $|R| = r - 1$ maka R mempunyai $r - 1$ gap dengan beberapa gap mungkin kosong.

Pada Teorema 6 dan Teorema 7 berikut, akan ditunjukkan bilangan-pti dari $H \odot K_1$, dimana H adalah graf roda W_n dan graf kipas F_n. Misalkan $H = G + K_1$. Misalkan $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, maka $V(H) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \cup \{v_0\}$ dimana $v_0 \in V(K_1)$. Misalkan u_i adalah titik ujung v_i di $H \odot K_1$ untuk $i \in [0, n]$. Berdasarkan Lema 1, misalkan G adalah graf terhubung, maka terdapat basis S dari $G + K_1$ sehingga $S \subseteq V(G)$.

Misalkan S adalah basis di $G + K_1$ dimana G adalah graf siklus atau graf lintasan. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $v_1 \in S$. Terdapat dua observasi berikut ini.

Observasi 4.

Setiap gap di S memuat paling banyak dua titik.

Bukti. Andaikan terdapat gap yang memuat tiga titik $v_l, v_{\{l+1\}}, v_{\{l+2\}}$ dengan $l \in [2, n-2]$ di G. Akibatnya, $r(v_0|S) = (2,2, \dots ,2) = r(v_{\{l+1\}}|S)$, kontradiksi. Oleh karena itu, setiap gap di S memuat paling banyak dua titik. ■

Observasi 5.

Jika sebuah gap di S memuat dua titik maka tetangga gap memuat paling banyak satu titik.

Bukti. Andaikan terdapat dua gap yang berbeda dan $\{v_l, v_{\{l+1\}}, v_{\{l+2\}}, v_{\{l+3\}}, v_{\{l+4\}}\}$ untuk suatu $l \in [2, n-4]$ dengan $v_{\{l+2\}} \in S$. Akibatnya, $r\left(v_{\{l+1\}}\middle|S\right) = r(v_{\{l+3\}}|S)$. Oleh karena itu, jika sebuah gap di S memuat dua titik maka tetangga gap memuat paling banyak satu titik. ■

Selanjutnya, misalkan S sebarang titik (basis atau bukan) di S yang memenuhi Observasi 4 dan Observasi 5. Misalkan v sebarang titik di $V(G) - S$. Perhatikan dua kemungkinan berikut.

1. v termasuk gap berukuran 1 di S. Misalkan v_i dan v_j merupakan titik ujung dari suatu gap yang memuat v. Sehingga titik v bertetangga dengan v_i dan v_j serta mempunyai jarak dua dari semua titik lain di S. Karena $n \geq 8$, tidak ada titik lain yang mempunyai sifat ini. Akibatnya, $r(u|S) \neq r(v|S)$ untuk $u \neq v$.
2. v termasuk gap berukuran 2 di S.

   Misalkan v_i dan $v_{\{i+3\}}$ titik ujung dari suatu gap yang memuat v. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $v = v_{\{i+1\}}$. Akibatnya, $d(v, v_i) = 1$ dan $d(v, v_{i+3}) = 2$. Jika terdapat $u \in V(G') - S$ dengan $u \neq v$ dan $d(u, v_i) = 1$ dan $d(v, v_{i+3}) = 2$, maka terdapat $w \in W - \{v_i\}$ sehingga $d(u, w) = 1$ dan $d(v, w) = 2$.

Alfarisi dkk. [16] sudah membuktikan bilangan-pti dari graf $W_n \odot K_1$. Mereka mendapatkan hasil sebagai berikut. Untuk $n \geq 3$, diperoleh $nr(W_n \odot K_1) = \frac{n-1}{2} + 1$ dengan n ganjil, dan $nr(W_n \odot K_1) = \frac{n}{2} + 1$ dengan n genap. Akan tetapi untuk $n \geq 8$, mereka memperoleh hasil yang cukup besar. Pada Teorema 6 diberikan hasil perbaikan untuk $nr(W_n \odot K_1)$ untuk $n \geq$

8. Dapat diperhatikan bahwa hasil perbaikan yang didapat memiliki nilai yang lebih kecil dibandingkan nilai $nr(W_n \odot K_1)$ yang didapatkan oleh Alfarisi dkk. pada tahun 2019.

Teorema 6.

Misalkan n adalah bilangan bulat positif. Misalkan W_n adalah graf roda berorde $n \geq 8$ maka

$$nr(W_n \odot K_1) = \begin{cases} \left\lceil \frac{2n+2}{5} \right\rceil + 1, \text{jika } n = 1 \text{ atau } 3\ (mod\ 5), \\ \left\lfloor \frac{2n+2}{5} \right\rfloor + 1, \text{jika } n = 0{,}2, \text{ atau } 4 (mod\ 5). \end{cases}$$

Bukti:

Misalkan $V(W_n) = \{v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, dimana v_0 adalah titik pusat dari W_n serta u_i adalah titik ujung v_i di $W_n \odot K_1$ untuk $i \in [0, n]$. Misalkan $\mathrm{H} = W_n \odot \mathrm{K}_1$. Tinjau dua kasus berikut.

Kasus 1. Untuk $n = 1$ atau $3 (mod\ 5)$

Pertama, akan ditunjukkan bahwa $nr(W_n \odot K_1) \leq \left\lceil \frac{2n+2}{5} \right\rceil + 1$ dengan mengkonstruksi himpunan pembeda di $W_n \odot K_1$ dengan $\left\lceil \frac{2n+2}{5} \right\rceil + 1$ titik.

i. $n = 1\ (mod\ 5)$

Jika $n = 1\ (mod\ 5)$ maka $n = 5l + 1$ dengan $l \geq 2$ dan $\left\lceil \frac{2n+2}{5} \right\rceil + 1 = (2l + 1)$+1. Karena $S = \{v_{5i+1}, v_{5i+4} | 0 \leq i \leq l - 1\} \cup \{v_{5l+1}\} \cup \{v_0\}$ memuat $2l + 2$ titik.

ii. $n = 3 (mod\ 5)$

Jika $n = 3\ (mod\ 5)$ maka $n = 5l + 3$ dengan $l \geq 1$ dan $\left\lceil \frac{2n+2}{5} \right\rceil + 1 = (2l + 2)$+1. Karena $S = \{v_{5i+1}, v_{5i+4} | 0 \leq i \leq l - 1\} \cup \{v_{5l+1}, v_{5l+3}\} \cup \{v_0\}$ memuat $2l + 3$ titik.

Perhatikan himpunan S pada bagian i-ii bahwa S tidak memuat titik terisolasi karena $v_0 v_a \in E(W_n \odot K_1)$ dengan $v_a \in S - \{v_0\}$ dan memenuhi Observasi 4 dan Observasi 5. Oleh karena itu, S merupakan himpunan pembeda tanpa titik terisolasi.

Kasus 2. Untuk $n = 0, 2$ atau $4\ (mod\ 5)$

Pertama, akan ditunjukkan bahwa $nr(W_n \odot K_1) \leq \left\lfloor \frac{2n+2}{5} \right\rfloor + 1$ dengan mengkonstruksi himpunan pembeda di $W_n \odot K_1$ dengan $\left\lceil \frac{2n+2}{5} \right\rceil + 1$ titik.

i. $n = 0\ (mod\ 5)$

Jika $n = 0\ (mod\ 5)$ maka $n = 5l$ dengan $l \geq 2$ dan $\left\lfloor \frac{2n+2}{5} \right\rfloor + 1 = 2l + 1$. Karena $S = \{v_{5i+1}, v_{5i+4} | 0 \leq i \leq l - 1\} \cup \{v_0\}$ memuat $2l + 1$ titik.

ii. $n = 2\ (mod\ 5)$

Jika $n = 2\ (mod\ 5)$ maka $n = 5l + 2$ dengan $l \geq 1$ dan $\left\lfloor\frac{2n+2}{5}\right\rfloor + 1 = (2l + 1)$+1. Karena $S = \{v_{5i+1}, v_{5i+4} | 0 \leq i \leq l - 1\} \cup \{v_{5l+1}\} \cup \{v_0\}$ memuat $2l + 2$ titik.

iii. $n = 4\ (mod\ 5)$

Jika $n = 4\ (mod\ 5)$ maka $n = 5l + 4$ dengan $l \geq 1$ dan $\left\lfloor\frac{2n+2}{5}\right\rfloor + 1 = (2l + 2)$+1. Karena $S = \{v_{5i+1}, v_{5i+4} | 0 \leq i \leq l\} \cup \{v_0\}$ memuat $2l + 3$ titik.

Perhatikan himpunan S pada bagian i-iii bahwa S tidak memuat titik terisolasi karena $v_0v_a \in E(W_n \odot K_1)$ dengan $v_a \in S - \{v_0\}$ dan memenuhi Observasi 4 dan Observasi 5. Jadi, S adalah himpunan pembeda tanpa titik terisolasi.

Selanjutnya, akan ditunjukkan batas bawah. Tinjau dua kasus berikut.

Kasus 1. Untuk $n = 1$ atau $3(mod\ 5)$

Akan ditunjukkan $nr(W_n \odot K_1) \geq \left\lceil\frac{2n+2}{5}\right\rceil + 1$. Andaikan S' adalah himpunan-nr dari $W_n \odot K_1$ dengan $|S'| < \left\lceil\frac{2n+2}{5}\right\rceil + 1$. Berdasarkan Lema 3 bahwa himpunan-nr S' semua berada $V(W_n)$. Tinjau dua subkasus.

Subkasus 1. Misalkan $v_0 \notin S'$, berdasarkan Lema 1, setiap basis S memuat titik terisolasi, kontradiksi.

Subkasus 2. Misalkan $v_0 \in S'$, terdapat gap yang memiliki paling sedikit 3 titik. Namun, berdasarkan Observasi 5 bahwa setiap gap di S memuat paling banyak dua titik. Diperoleh suatu kontradiksi.

Berdasarkan kedua subkasus tersebut diperoleh kontradiksi terhadap asumsi bahwa terdapat himpunan-nr dari $W_n \odot K_1$ dengan $|S'| < \left\lceil\frac{2n+2}{5}\right\rceil + 1$. Dengan demikian diperoleh bahwa $nr(W_n \odot K_1) \geq \left\lceil\frac{2n+2}{5}\right\rceil + 1$.

Kasus 2. Untuk $n = 0{,}2$ atau $4(mod\ 5)$

Akan ditunjukkan $nr(W_n \odot K_1) \geq \left\lfloor\frac{2n+2}{5}\right\rfloor + 1$. Andaikan S' adalah himpunan-nr dari $W_n \odot K_1$ dengan $|S'| < \left\lfloor\frac{2n+2}{5}\right\rfloor + 1$. Berdasarkan Lema 3 bahwa himpunan-nr S' semua berada W_n. Tinjau dua subkasus.

Subkasus 1. Misalkan $v_0 \notin S'$, berdasarkan Lema 1, setiap basis S memuat titik terisolasi, kontradiksi.

Subkasus 2. Misalkan $v_0 \in S'$, terdapat gap yang memiliki paling sedikit 3 titik. Namun, berdasarkan Observasi 5 bahwa setiap gap di S memuat paling banyak dua titik. Diperoleh suatu kontradiksi.

Berdasarkan kedua subkasus tersebut diperoleh kontradiksi terhadap asumsi bahwa terdapat himpunan-nr dari $W_n \odot K_1$ dengan $|S'| < \left\lfloor \frac{2n+2}{5} \right\rfloor + 1$. Dengan demikian diperoleh bahwa $nr(W_n \odot K_1) \geq \left\lfloor \frac{2n+2}{5} \right\rfloor + 1$. ■

Berdasarkan hasil pada Teorema 6, dapat dilihat bahwa bilangan-pti pada graf $W_n \odot K_1$ dipengaruhi oleh struktur graf. Pada graf roda terdapat satu titik pusat yang bertetangga dengan seluruh titik pada siklus. Struktur ini menyebabkan pemilihan himpunan pembeda tanpa titik terisolasi harus memperhatikan distribusi titik pada siklus serta memasukkan titik pusat sebagai anggota himpunan pembeda. Pemilihan titik-titik pada siklus diperlukan agar setiap titik pada graf memiliki representasi jarak yang berbeda terhadap himpunan pembeda, sedangkan keberadaan titik pusat memastikan bahwa subgraf yang diinduksi tidak memiliki titik terisolasi. Selain itu, pola pemilihan titik-titik pembeda pada siklus membentuk distribusi yang berulang setiap lima titik. Oleh karena itu, banyaknya titik pembeda yang diperlukan bergantung pada nilai $n \ (mod\ 5)$, sehingga bilangan-pti pada graf $W_n \odot K_1$ dinyatakan dalam bentuk yang bergantung pada $n \ (mod\ 5)$.

Selanjutnya, pada Teorema 7, diberikan bilangan-pti dari $F_n \odot K_1$.

Teorema 7.

Misalkan F_n adalah graf kipas berorde $n \geq 7$, maka

$$nr(F_n \odot K_1) = \left\lceil \frac{2n+2}{5} \right\rceil + 1.$$

Bukti:

Misalkan $V(F_n) = \{v_0, v_1, v_2, \dots, v_n\}$, dimana v_0 adalah titik pusat dari F_n serta u_i adalah titik ujung v_i di $F_n \odot K_1$ untuk $i \in [0, n]$. Pertama, akan ditunjukkan bahwa $nr(F_n \odot K_1) \leq \left\lceil \frac{2n+2}{5} \right\rceil + 1$ dengan mengkonstruksi himpunan pembeda di $F_n \odot K_1$ dengan $\left\lceil \frac{2n+2}{5} \right\rceil + 1$ titik. Tinjau lima kasus berikut.

i. $n = 0 \ (mod\ 5)$

Jika $n = 0 \ (mod\ 5)$ maka $n = 5l$ dengan $l \geq 2$ dan $\left\lceil \frac{2n+2}{5} \right\rceil + 1 = (2l + 1)$+1. Karena $S = \{v_{5i+1}, v_{5i+4} | 0 \leq i \leq l - 1\} \cup \{v_{5l}\} \cup \{v_0\}$ memuat $2l + 2$ titik.

ii. $n = 1 \ (mod\ 5)$

Jika $n = 1 \ (mod\ 5)$ maka $n = 5l + 1$ dengan $l \geq 2$ dan $\left\lceil \frac{2n+2}{5} \right\rceil + 1 = (2l + 1)$+1. Karena $S = \{v_{5i+1}, v_{5i+4} | 0 \leq i \leq l - 1\} \cup \{v_{5l+1}\} \cup \{v_0\}$ memuat $2l + 2$ titik.

iii. $n = 2 \ (mod\ 5)$

Jika $n = 2\ (mod\ 5)$ maka $n = 5l + 2$ dengan $l \geq 1$ dan $\left\lceil \frac{2n+2}{5} \right\rceil + 1 = (2l + 2)$+1. Karena $S = \{v_{5i+1}, v_{5i+4} | 0 \leq i \leq l - 1\} \cup \{v_{5l+1}, v_{5l+2}\} \cup \{v_0\}$ memuat $2l + 3$ titik.

iv. $n = 3\ (mod\ 5)$

Jika $n = 3\ (mod\ 5)$ maka $n = 5l + 3$ dengan $l \geq 1$ dan $\left\lceil \frac{2n+2}{5} \right\rceil + 1 = (2l + 2)$+1. Karena $S = \{v_{5i+1}, v_{5i+4} | 0 \leq i \leq l - 1\} \cup \{v_{5l+1}, v_{5l+3}\} \cup \{v_0\}$ memuat $2l + 3$ titik.

v. $n = 4\ (mod\ 5)$

Jika $n = 4\ (mod\ 5)$ maka $n = 5l + 4$ dengan $l \geq 1$ dan $\left\lceil \frac{2n+2}{5} \right\rceil + 1 = (2l + 2)$+1. Karena $S = \{v_{5i+1}, v_{5i+4} | 0 \leq i \leq l\} \cup \{v_0\}$ memuat $2l + 3$ titik.

Perhatikan himpunan S pada bagian i-v bahwa S tidak memuat titik terisolasi karena $v_0 v_a \in E(F_n \odot K_1)$ dengan $v_a \in S - \{v_0\}$ dan memenuhi Observasi 4 dan Observasi 5. Sehingga, S adalah himpunan pembeda tanpa titik terisolasi.

Selanjutnya, akan ditunjukkan batas bawah. Akan ditunjukkan $nr(F_n \odot K_1) \geq \left\lceil \frac{2n+2}{5} \right\rceil + 1$. Andaikan S' adalah himpunan-nr dari $F_n \odot K_1$ dengan $|S'| < \left\lceil \frac{2n+2}{5} \right\rceil + 1$. Berdasarkan Lema 3 bahwa himpunan-nr S' semua berada F_n. Tinjau dua subkasus.

Subkasus 1. Misalkan $v_0 \notin S'$, berdasarkan Lema 1, setiap basis S memuat titik terisolasi, kontradiksi.

Subkasus 2. Misalkan $v_0 \in S'$, terdapat gap yang memiliki paling sedikit 3 titik. Namun, berdasarkan Observasi 5 bahwa setiap gap di S memuat paling banyak dua titik. Diperoleh suatu kontradiksi.

Berdasarkan kedua subkasus tersebut diperoleh suatu kontradiksi terhadap asumsi bahwa terdapat himpunan-nr S' dari $F_n \odot K_1$ dengan $|S'| < \left\lceil \frac{2n+2}{5} \right\rceil + 1$. Dengan demikian diperoleh bahwa $nr(F_n \odot K_1) \geq \left\lceil \frac{2n+2}{5} \right\rceil + 1$. ■

Berdasarkan hasil pada Teorema 7, dapat dilihat bahwa bilangan-pti pada graf $F_n \odot K_1$ dipengaruhi oleh struktur graf kipas. Pada graf kipas terdapat satu titik pusat yang bertetangga dengan seluruh titik pada lintasan. Pemilihan himpunan pembeda tanpa titik terisolasi memperhatikan titik-titik pada lintasan serta memasukkan titik pusat sebagai anggota himpunan pembeda. Pemilihan titik-titik pada lintasan bertujuan untuk membedakan representasi jarak antar titik pada graf, sedangkan keberadaan titik pusat memastikan bahwa subgraf yang diinduksi tidak memiliki titik terisolasi.

4 Simpulan

Pada makalah ini, dibahas tentang bilangan-pti graf operasi korona $G \odot K_1$ dengan G adalah graf roda dan graf kipas. Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan, diperoleh bahwa bilangan-pti dari graf $W_n \odot K_1$ dan graf $F_n \odot K_1$ dapat ditentukan berdasarkan struktur graf yang terbentuk. Hasil yang diperoleh menunjukkan bahwa bilangan-pti pada graf tersebut dipengaruhi oleh banyaknya titik pada graf roda dan graf kipas yang digunakan dalam operasi korona.

Selain itu, hasil penelitian ini menunjukkan bahwa bilangan-pti yang diperoleh lebih kecil dibandingkan dengan hasil penelitian sebelumnya oleh Alfarisi dkk. [16].

5 Daftar Pustaka

[1] P.J.Slater, "Leaves of trees," *Congr. Num.*, vol. 14, pp. 549–559, 1975.

[2] R. A. Harary, F.; Melter, "On the metric dimension of a graph," *Ars Comb*, vol. 2, pp. 191–195, 1976.

[3] S. Khuller, B. Raghavachari, and A. Rosenfeld, "Landmarks in graphs," *Discret. Appl. Math.*, vol. 70, no. 3, pp. 217–229, 1996, doi: 10.1016/0166-218X(95)00106-2.

[4] G. Chartrand, L. Eroh, M. A. Johnson, and O. R. Oellermann, "Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph," *Discret. Appl. Math.*, vol. 105, no. 1–3, pp. 99–113, 2000, doi: 10.1016/S0166-218X(00)00198-0.

[5] E. Sebo, A; Tannier, "On Metric Generators of Graphs," *Math. Oper. Res.*, vol. 29, pp. 383–393, 2004.

[6] G. Chartrand and P. Zhang, "The theory and applications of resolvability in graphs: A survey," *Congr. Numer*, vol. 160, pp. 47–68, 2003.

[7] M. Bača, E. T. Baskoro, A. N. M. Salman, S. W. Saputro, and D. Suprijanto, "The metric dimension of regular bipartite graphs," *Bull. Math. la Soc. des Sci. Math. Roum.*, vol. 54, no. 1, pp. 15–28, 2011.

[8] P. J. B. Chitra and S. Arumugam, "Resolving Sets without Isolated Vertices," in *Procedia Computer Science*, 2015, vol. 74, doi: 10.1016/j.procs.2015.12.072.

[9] S. Avadayappan, M. Bhuvaneshwari, and P. J. B. Chitra, "More results on Non-isolated resolving number of a graph," *Int. J. Appl. Adv. Sci. Res. Spec. issue*, pp. 49–53, 2017.

[10] S. Avadayappan, M. Bhuvaneshwari, and P. J. B. Chitra, "Non-Isolated Resolving Number for Some Splitting Graphs," *Int. J.Math. Comb.*, vol. 1, no. 1, pp. 9–18, 2018.

[11] W. N. Sholihah, D. Dafik, and K. Kusbudiono, "Metric Dimension dan Non-Isolated Resolving Number pada Beberapa Graf," *CGANT J. Math. Appl.*, vol. 2, no. 1, 2021, doi:

10.25037/cgantjma.v2i1.48.

[12] W. Abidin, "Bilangan Pembeda tanpa Titik Terisolasi Graf Cycle Books," *J. MSA (Matematika dan Stat. serta Apl.*, vol. 11, no. 1, pp. 118–124, 2023, doi: 10.24252/msa.v11i1.40841.

[13] I. M. Hasibuan, A. N. M. Salman, and S. W. Saputro, "Non-isolated Resolving Sets of certain Graphs Cartesian Product with a Path," in *Journal of Physics: Conference Series*, 2018, vol. 1008, no. 1, doi: 10.1088/1742-6596/1008/1/012045.

[14] I. M. Hasibuan, A. N. M. Salman, and S. W. Saputro, "The Non-Isolated Resolving Number Of A Graph Cartesian Product with A Complete Graph," *Acta Math. Univ. Comenianae*, vol. 91, no. 3, 2022.

[15] R. Alfarisi, D. Dafik, A. I. Kristiana, E. R. Albirri, and I. H. Agustin, "Non-isolated resolving number of graphs with homogeneous pendant edges," in *AIP Conference Proceedings*, 2018, vol. 2014, doi: 10.1063/1.5054416.

[16] R. Alfarisi, Dafik, A. I. Kristiana, and I. H. Agustin, "Non-Isolated Resolving Number of Graph with Pendant Edges," *J. Interconnect. Networks*, vol. 19, no. 2, 2019, doi: 10.1142/S0219265919500038.

[17] S. W. Saputro *et al.*, "The metric dimension of the lexicographic product of graphs," *Discrete Math.*, vol. 313, no. 9, pp. 1045–1051, 2013, doi: 10.1016/j.disc.2013.01.021.

[18] W. Abidin, A. Salman, and S. W. Saputro, "Non-Isolated Resolving Sets of Corona Graphs with Some Regular Graphs," *Mathematics*, vol. 10, no. 6, p. 962, Mar. 2022, doi: 10.3390/math10060962.

[19] W. Abidin, "Bilangan Pembeda Tanpa Titik Terisolasi Graf Hasil Operasi Korona dan Hasil Operasi Sisir Titik," Matematika, 2023. https://digilib.itb.ac.id/gdl/view/70323#