

Solusi Soliton *On-Site* Persamaan *Saturable Discrete Nonlinear Schrödinger* Menggunakan Metode Newton

Galang Vinarky¹, Tarmizi Usman^{2*}, Muhammad Ikhwan³, Harish Abdillah Mardi⁴

¹Program Studi Magister Matematika Universitas Syiah Kuala Banda Aceh Indonesia

^{2,3}Departemen Matematika Universitas Syiah Kuala Banda Aceh Indonesia

⁴Program Studi Doktor Matematika dan Aplikasi Sains Universitas Syiah Kuala Banda Aceh Indonesia

*Corresponding author: tarmiziusman@usk.ac.id

Diajukan: 13 Januari 2026, Diperbaiki: 5 Maret 2026, Diterima: 13 Maret 2026

Abstrak

Persamaan *discrete nonlinear Schrödinger* merupakan persamaan diferensial yang mendeskripsikan perambatan gelombang dalam kisi-kisi diskret. Persamaan ini memiliki solusi dengan karakteristik yang sangat menarik, yaitu soliton. Dua jenis soliton yang dapat diperoleh dari persamaan diferensial ini adalah soliton *on-site* dan *inter-site*. Persamaan yang menjadi fokus dalam penelitian ini adalah persamaan *discrete nonlinear Schrödinger* dengan nonlinieritas tipe *saturable*. Solusi soliton *on-site* dalam penelitian ini diperoleh dengan mensubstitusikan suatu *ansatz* ke persamaan sehingga diperoleh suatu persamaan stasioner. Persamaan stasioner ini kemudian diselesaikan dengan menggunakan metode Newton. Solusi tersebut kemudian dianalisis kestabilannya dengan menambahkan suku perturbasi pada *ansatz* solusi. Penelitian ini bertujuan untuk menemukan solusi soliton *on-site*, menganalisis pengaruh parameter kopling, nonlinieritas, dan potensial perangkap terhadap profil soliton, serta menganalisis kestabilan setiap solusi yang diperoleh dengan teknik perturbasi linier. Hasil penelitian menunjukkan bahwa variasi nilai parameter kopling dan nonlinieritas yang diberikan serta potensial perangkap memengaruhi profil soliton *on-site*, baik dari segi lebar profil maupun amplitudo soliton. Semua solusi yang diperoleh dinyatakan stabil berdasarkan analisis kestabilan linier.

Kata Kunci: DNLS, soliton diskret, gelombang soliter

Abstract

The discrete nonlinear Schrödinger equation is a differential equation that describes wave propagation in a discrete lattice. This equation has solutions with very interesting characteristics, namely solitons. Two types of solitons that can be obtained from this differential equation are on-site and inter-site solitons. The equation that is the focus of this study is the discrete nonlinear Schrödinger equation with saturable type nonlinearity. The on-site soliton solution in this study is obtained by substituting an ansatz into the equation to obtain a stationary equation. This stationary equation is then solved using Newton's method. The solution is then analyzed for stability by adding a perturbation term to the solution ansatz. This study aims to find the on-site soliton solution, analyze the effect of coupling parameters, nonlinearity, and trapping potential on the soliton profile, and analyze the stability of each solution obtained by the linear perturbation technique. The results show that variations in the values of the coupling parameters and the given nonlinearity and trapping potential affect the on-site soliton profile, both in terms of profile width and soliton amplitude. All obtained solutions are declared stable based on linear stability analysis.

Keywords: DNLS, discrete soliton, solitary wave

1 Pendahuluan

Persamaan *discrete nonlinear Schrodinger* (DNLS) merupakan salah satu persamaan diferensial (PD) nonlinier yang telah digunakan dalam memodelkan berbagai fenomena fisis, seperti Bose-Einstein *condensation* (BEC) [1] dan perambatan gelombang dalam *waveguide array* [2]. Persamaan ini telah dikaji oleh banyak peneliti, seperti yang dilakukan dalam [3]–[8]. Persamaan DNLS secara umum berbentuk sebagai berikut [7]

$$i \frac{d\Psi_n}{dt} + C(\Psi_{n+1} - 2\Psi_n + \Psi_{n-1}) + F(\Psi_{n-1}, \Psi_n, \Psi_{n+1}) = 0$$

dengan $\Psi_n \equiv \Psi_n(t) \in \mathbb{C}$ merupakan amplitudo kompleks gelombang di situs diskret $n \in \mathbb{Z}$ pada saat $t \in \mathbb{R}^+$, C merupakan parameter kopling yang mendeskripsikan kekuatan interaksi antar situs yang bertetangga, $F(\Psi_{n-1}, \Psi_n, \Psi_{n+1})$ merupakan suku nonlinier yang memiliki tipe yang bervariasi, di antaranya adalah

- 1) Tipe Kubik: $|\Psi_n|^2 \Psi_n$
- 2) Tipe Kuintik: $|\Psi_n|^4 \Psi_n$
- 3) Tipe Ablowitz-Ladik: $\frac{1}{2} |\Psi_n|^2 (\Psi_{n+1} + \Psi_{n-1})$
- 4) Tipe *Saturable*: $\frac{|\Psi_n|^2}{1+|\Psi_n|^2} \Psi_n$

Persamaan DNLS memiliki solusi yang menarik perhatian para peneliti, yaitu solusi soliton. Soliton merupakan gelombang yang memiliki karakteristik bentuk yang stabil, menempati ruang yang terbatas, tidak menyebar, mempertahankan kecepatan yang tetap saat merambat [9]. Nama soliton berasal dari kata *solitary* dan akhiran yang merujuk kepada partikel-partikel fundamental fisika, seperti proton atau elektron [10]. Kajian mengenai soliton berawal dari penemuan seorang ilmuwan dan insinyur kapal bernama John Scott Russel yang menemukan fenomena gelombang air dalam kanal yang mampu mempertahankan bentuk dan kecepatannya dalam selang waktu yang cukup lama [11]. Gelombang ini Russel sebut sebagai *solitary wave* atau *wave translation*. Istilah Soliton pertama kali digunakan dalam [12] untuk menyebut solusi dari persamaan Korteweg-De Vries (KDV) yang memiliki karakteristik seperti gelombang soliter. Pada awalnya kajian mengenai soliton berasal dari sistem kontinu seperti gelombang air dalam kanal dan fiber optik. Akan tetap seiring berkembangnya ilmu pengetahuan, soliton juga muncul dan dibahas dalam sistem diskret. Pada persamaan DNLS terdapat dua solusi stasioner, yaitu soliton *on-site* dan *inter-site*. Soliton *on-site* memiliki puncak yang berada pada satu situs diskret sedangkan soliton *inter-site* berpuncak di antara dua situs yang bertetangga [13].

Dalam [3], [5] solusi stasioner persamaan DNLS dicari dengan menggunakan metode *Variational Approximation* (VA) sedangkan dalam [6], [7] menggunakan *Trust-Region Dogleg*.

Metode VA dapat menyediakan pendekatan analitik yang akurat untuk menghampiri solusi persamaan DNLS ketika konstanta pengikat mendekati nol, namun tingkat keakuratannya sangat bergantung secara mutlak pada pemilihan *ansatz*. Nilai galatnya akan semakin membesar seiring dengan meningkatnya nilai konstanta pengikat. Pada tahap akhir, metode ini tetap membutuhkan intervensi metode numerik untuk menyelesaikan sistem persamaan dari parameter variasionalnya. Di lain sisi, metode *Trust-Region Dogleg* sangat efisien dalam meminimalkan fungsi model dengan menggabungkan arah penurunan tercuram dan arah titik *quasi-Newton* untuk mengonstruksi profil soliton numerik. Akan tetapi, metode ini sangat peka terhadap rentang parameter komputasi sehingga bentuknya dapat terdeformasi dan tidak diperoleh solusi *on-site* jika nilai parameter komputasinya berada di luar rentang batas yang disyaratkan.

Selain dengan metode VA dan *Trust-Region Dogleg*, persamaan DNLS dapat diselesaikan menggunakan metode Newton. Metode Newton merupakan metode numerik pencarian akar persamaan nonlinier yang mapan dan teruji bahkan sering digunakan untuk mengevaluasi keakuratan metode VA dan metode numerik lainnya. Metode ini sangat mudah untuk dipahami serta diaplikasikan. Selain itu, metode ini memiliki laju konvergensi kuadratik jika tebakan awal yang diberikan cukup baik [14]. Metode ini hanya membutuhkan sebuah tebakan awal dan invers dari matriks Jacobian untuk melakukan perhitungan akar sehingga sangat mudah untuk diimplementasikan. Terdapat beberapa kriteria yang dapat digunakan dalam penentuan konvergensi atau penghentian iterasi metode Newton, salah satunya adalah jarak Euclidean antara akar yang baru diperoleh dari perhitungan dengan akar sebelumnya.

Solusi stasioner yang diperoleh dalam [3], [5]–[7] menggunakan persamaan DNLS dengan nonlinieritas tipe kubik-kuintik, yaitu penjumlahan nonlinieritas tipe kubik dan kuintik. Pada persamaan dengan nonlinieritas tipe ini, nonlinieritas akan terus meningkat seiring peningkatan $|\Psi_n|$. Dalam fenomena nyata, peningkatan nonlinieritas tidak mungkin menuju tak hingga. Nonlinieritas tipe *saturable* menjawab masalah ini di mana nonlinieritas dapat jenuh setelah mengalami peningkatan sampai nilai tertentu. Pada saat $|\Psi_n|$ bernilai kecil, suku nonlinieritas $|\Psi_n|^2\Psi_n/(1 + |\Psi_n|^2)$ mendekati $|\Psi_n|^2\Psi_n$ yang mana bentuknya merupakan nonlinieritas tipe kubik. Akan tetapi saat $|\Psi_n|$ cukup besar, suku $|\Psi_n|^2\Psi_n/(1 + |\Psi_n|^2)$ mendekati Ψ_n yang mana bentuknya menjadi linier.

Penelitian ini bertujuan untuk menemukan solusi *on-site* persamaan DNLS, menganalisis pengaruh parameter persamaan DNLS terhadap profil solusi soliton, dan menganalisis kestabilan dari setiap solusi yang diperoleh. Dalam penelitian ini, persamaan DNLS ditransformasikan ke dalam sistem persamaan aljabar nonlinier dengan melakukan substitusi *ansatz*. Sistem hasil transformasi berikutnya diselesaikan menggunakan metode Newton dengan beberapa variasi nilai

parameter. Solusi yang diperoleh merupakan profil solusi yang tidak terikat dengan variabel waktu. Dari solusi yang diperoleh, dilakukan analisis pengaruh nilai parameter terhadap profil soliton. Lalu dengan menggunakan teknik perturbasi linier, dilakukan analisis kestabilan linier melalui nilai eigen untuk setiap solusi.

2 Metode Penelitian

2.1 Persamaan *saturable discrete nonlinear* Schrodinger

Persamaan yang dikaji dalam penelitian ini adalah persamaan DNLS dengan nonlinieritas tipe *saturable* (selanjutnya disebut persamaan *saturable discrete nonlinear* Schrodinger atau S-DNLS) dengan bentuk sebagai berikut.

$$i \frac{\partial \Psi_n}{\partial t} + \frac{\beta}{2} (\Psi_{n+1} - 2\Psi_n + \Psi_{n-1}) + \sigma \frac{|\Psi_n|^2}{1 + |\Psi_n|^2} \Psi_n - V_n \Psi_n = 0 \quad (1)$$

dengan $\beta \in \mathbb{R}$ sebagai parameter kopling, $\sigma \in \mathbb{R}$ sebagai parameter nonlinieritas, dan $V_n \in \mathbb{R}$ potensial perangkat yang dalam penelitian ini dibagi menjadi dua kasus, yaitu tanpa potensial perangkat ($V_n = 0$) dan dengan potensial perangkat $V_n = n^2$. Untuk memperoleh solusi soliton diskret dari (1), digunakan *ansatz*

$$\Psi_n = \psi_n e^{i\Omega t} \quad (2)$$

dengan $\Omega \in \mathbb{R}$ merupakan frekuensi osilasi [4]. Secara umum fungsi ψ_n bernilai kompleks. Akan tetapi untuk memudahkan analisis, dalam penelitian ini diasumsikan $\psi_n \in \mathbb{R}$. *Ansatz* (2) berikutnya disubstitusikan ke (1) dan dilakukan manipulasi aljabar sehingga diperoleh persamaan

$$f_n = -\Omega \psi_n + \frac{\beta}{2} (\psi_{n+1} - 2\psi_n + \psi_{n-1}) + \sigma \frac{\psi_n^3}{1 + \psi_n^2} - V_n \psi_n = 0 \quad (3)$$

Persamaan (3) yang berbentuk persamaan aljabar nonlinier ini disebut sebagai persamaan S-DNLS stasioner.

Misalkan diberikan domain diskret $n = \{-N, -N + 1, \dots, N\}$. Persamaan (3) untuk setiap n dapat ditulis sebagai sistem persamaan dengan $2N + 1$ persamaan dan $2N + 1$ variabel berikut

$$\mathbf{f} = [f_{-N} \quad f_{-N+1} \quad \dots \quad f_N]^T = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0]^T \quad (4)$$

di mana variabel-variabel yang harus dicari akarnya adalah

$$\boldsymbol{\psi} = [\psi_{-N} \quad \psi_{-N+1} \quad \dots \quad \psi_N]^T.$$

Pada (4) terdapat persamaan f_{-N} dan f_N yang memiliki nilai-nilai di luar domain, yaitu ψ_{-N-1} dan ψ_{N+1} . Agar keduanya tetap terdefinisi, digunakan batas Dirichlet $\psi_{-N-1} = \psi_{N+1} = 0$.

2.2 Metode Newton pada persamaan S-DNLS stasioner

Untuk menerapkan menggunakan metode Newton dalam penyelesaian (4), diperlukan matriks

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{-N}}{\partial \psi_{-N}} & \frac{\beta}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta}{2} & \frac{\partial f_{-N+1}}{\partial \psi_{-N+1}} & \frac{\beta}{2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta}{2} & \frac{\partial f_{-N+2}}{\partial \psi_{-N+2}} & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \frac{\partial f_{N-2}}{\partial \psi_{N-2}} & \frac{\beta}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{\beta}{2} & \frac{\partial f_{N-1}}{\partial \psi_{N-1}} & \frac{\beta}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{\beta}{2} & \frac{\partial f_N}{\partial \psi_N} \end{bmatrix}$$

di mana

$$\frac{\partial f_n}{\partial \psi_n} = -\Omega - \beta + \sigma \frac{3\psi_n^2 + \psi_n^4}{(1 + \psi_n^2)^2} - V_n.$$

Matriks J merupakan matriks Jacobian [14] yang berukuran $(2N + 1) \times (2N + 1)$. Nilai Ψ dapat didekati menggunakan metode Newton dengan algoritma sebagai berikut.

- 1) Inisiasi: Masukkan nilai awal $\Psi^{(0)}$ dan toleransi galat ϵ
- 2) Hitung fungsi $\mathbf{f}(\Psi^{(0)})$
- 3) Hitung Jacobian $\mathbf{J}(\Psi^{(0)})$
- 4) Hitung $\Psi = \Psi^{(0)} - \mathbf{J}^{-1}(\Psi^{(0)})\mathbf{f}(\Psi^{(0)})$
- 5) Hitung galat = $\|\Psi - \Psi^{(0)}\|$
- 6) Jika galat $> \epsilon$, maka $\Psi^{(0)} = \Psi$ dan kembali ke langkah 2.
- 7) Cetak solusi Ψ

Pada penelitian ini, nilai awal yang digunakan dalam perhitungan solusi persamaan S-DNLS adalah

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2\Omega}{\sigma}} \operatorname{sech}\left(n \sqrt{\frac{2\Omega}{\beta}}\right) \quad (5)$$

yang diadopsi dari solusi analitik persamaan NLS dengan nonlinieritas kubik tanpa potensial perangkap [9]. Nilai awal lainnya seperti $\psi_n = \operatorname{sech}(n)$ juga dapat digunakan seperti dalam [6], [7]. Akan tetapi jika nilai awal yang digunakan tidak cukup dekat dengan solusi, perhitungan bisa membutuhkan lebih banyak iterasi bahkan dapat menjadi divergen sehingga tidak diperoleh solusi. Oleh karena nonlinieritas *saturable* mendekati nonlinieritas kubik pada saat magnitudo Ψ_n cukup kecil, digunakan (5) agar nilai awal cukup dekat dengan solusi. Adapun untuk menghentikan iterasi digunakan toleransi galat $\epsilon = 10^{-6}$.

2.3 Kestabilan Linier Persamaan S-DNLS

Untuk menganalisis kestabilan linier dari solusi persamaan S-DNLS, (1) ditulis kembali sebagai

$$i \frac{\partial \Psi_n}{\partial t} = -\frac{\beta}{2} (\Psi_{n+1} - 2\Psi_n + \Psi_{n-1}) - \sigma \frac{|\Psi_n|^2}{1+|\Psi_n|^2} \Psi_n + V_n \Psi_n. \quad (6)$$

Berikutnya dilakukan penambahan suku perturbasi pada (2) untuk memberikan gangguan kecil pada solusi sehingga diperoleh

$$\Psi_n = (\psi_n + \varepsilon \phi_n + O(\varepsilon^2)) e^{i\Omega t} \quad (7)$$

di mana fungsi $\phi_n \equiv \phi_n(t) \in \mathbb{R}$ dan $\varepsilon \in \mathbb{R}$ dengan $|\varepsilon| \ll 1$. Karena ε sangat kecil, suku-suku $O(\varepsilon^2)$ atau yang lebih tinggi menjadi semakin kecil sehingga dapat diabaikan. Selanjutnya (7) disubstitusikan ke (6) dan dilakukan manipulasi aljabar sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_n}{\partial t} = & i \frac{\beta}{2} \phi_{n+1} - i \left(\Omega + \beta - \sigma \frac{3\psi_n^2}{1+\psi_n^2} + V_n \right) \phi_n + i \frac{\beta}{2} \phi_{n-1} + \frac{i}{\varepsilon} \left(-\Omega \psi_n + \frac{\beta}{2} (\psi_{n+1} - \right. \\ & \left. 2\psi_n + \psi_{n-1}) + \sigma \frac{\psi_n^2}{1+\psi_n^2} - V_n \psi_n \right) \end{aligned} \quad (8)$$

Dapat diperhatikan bahwa suku-suku terakhir dari (8) sama dengan ruas kiri (3) yang nilainya sama dengan nol. Maka (8) dapat ditulis sebagai

$$\frac{\partial \phi_n}{\partial t} = i \frac{\beta}{2} \phi_{n+1} - i \left(\Omega + \beta - \sigma \frac{3\psi_n^2}{1+\psi_n^2} + V_n \right) \phi_n + i \frac{\beta}{2} \phi_{n-1} \quad (9)$$

Persamaan (9) digunakan untuk menganalisis kestabilan persamaan S-DNLS. Berikutnya (9) dapat dituliskan untuk setiap $n = -N, -N + 1, \dots, N$ dalam bentuk matriks dan vektor berikut.

$$\frac{d\Phi}{dt} = A\Phi \quad (10)$$

di mana

$$\begin{aligned} \Phi &= [\phi_{-N} \quad \phi_{-N+1} \quad \cdots \quad \phi_{N-1} \quad \phi_N]^T, \\ A &= i \begin{bmatrix} -a_{-N} & \frac{\beta}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta}{2} & -a_{-N+1} & \frac{\beta}{2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta}{2} & -a_{-N+2} & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & -a_{N-2} & \frac{\beta}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{\beta}{2} & -a_{N-1} & \frac{\beta}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{\beta}{2} & -a_N \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dengan

$$a_n = \left(\Omega + \beta - \sigma \frac{3\psi_n^2}{1 + \psi_n^2} + V_n \right).$$

Selanjutnya, dengan mengasumsikan bahwa solusi (10) berbentuk

$$\Phi = \xi e^{\lambda t} \quad (11)$$

di mana ξ merupakan vektor dengan dimensi $2N + 1$, diperoleh persamaan karakteristik

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (12)$$

di mana I merupakan matriks identitas dengan ordo $(2N + 1) \times (2N + 1)$. Dengan menyelesaikan (12), diperoleh nilai-nilai eigen (λ) matriks A yang menjadi indikator dalam menentukan kestabilan solusi persamaan S-DNLS. Jika semua nilai eigen memiliki bagian riil negatif atau nol, maka solusi sistem stabil. Akan tetapi jika terdapat bagian riil positif, maka solusi sistem tidak stabil [15].

Misalkan matriks $B = \frac{1}{i}A$ dengan nilai eigen μ dan vektor eigen \mathbf{v} . Dengan demikian

$$B\mathbf{v} = \mu\mathbf{v}. \quad (13)$$

Karena $A = iB$ dan (13), maka diperoleh

$$A\mathbf{v} = iB\mathbf{v} = i\mu\mathbf{v} = (i\mu)\mathbf{v}. \quad (14)$$

Dari (14) diperoleh hubungan nilai eigen matriks A dengan matriks B , yaitu $\lambda = i\mu$. Berikutnya Persamaan (13) dikalikan dengan transpos konjugat \mathbf{v} , yaitu \mathbf{v}^\dagger sehingga diperoleh

$$\mu = \frac{\mathbf{v}^\dagger B \mathbf{v}}{\mathbf{v}^\dagger \mathbf{v}}.$$

Karena $\Omega, \beta, \sigma, V_n, \psi_n \in \mathbb{R}$, semua entri B adalah riil. Matriks B merupakan matriks simetris sehingga berlaku $B^\dagger = B$. Dengan demikian diperoleh

$$\bar{\mu} = \frac{\overline{(\mathbf{v}^\dagger B \mathbf{v})}}{\overline{(\mathbf{v}^\dagger \mathbf{v})}} = \frac{(\mathbf{v}^\dagger B \mathbf{v})^\dagger}{(\mathbf{v}^\dagger \mathbf{v})^\dagger} = \frac{\mathbf{v}^\dagger B \mathbf{v}}{\mathbf{v}^\dagger \mathbf{v}} = \mu. \quad (15)$$

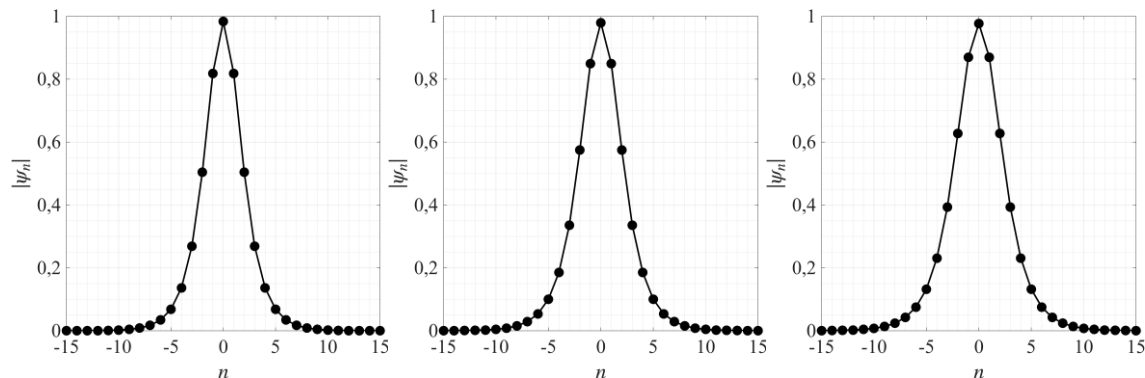
Dari (15) dapat diketahui bahwa μ merupakan bilangan riil karena $\bar{\mu} = \mu$. Akibatnya λ merupakan bilangan imajiner murni, yaitu bagian riilnya adalah nol. Oleh karena itu solusi soliton persamaan S-DNLS ini stabil untuk berapa pun nilai parameter.

3 Hasil dan Pembahasan

3.1 Solusi Persamaan S-DNLS Tanpa Potensial Perangkap dan Kestabilannya

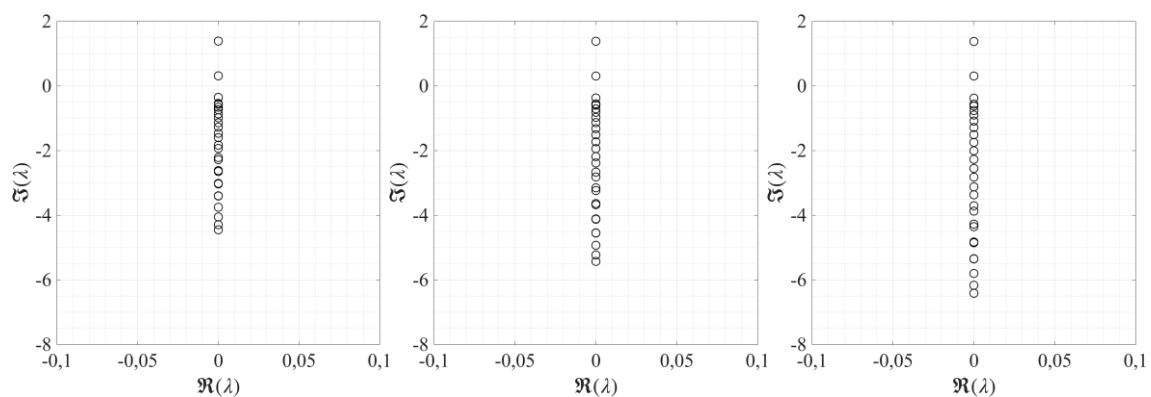
Simulasi solusi untuk persamaan S-DNLS tanpa potensial perangkap dilakukan dengan beberapa variasi parameter. Gambar 1 menunjukkan solusi persamaan dengan parameter $\sigma = 1,7$ dan $\beta = 2; 2,5; 3$ (dari kiri ke kanan). Dari Gambar 1 dapat dilihat bahwa lebar profil soliton yang diperoleh semakin ke kanan semakin besar. Soliton dengan $\beta = 2$ memiliki lebar 21, yaitu dari

$n = -10$ sampai $n = 10$. Soliton dengan $\beta = 2.5$ memiliki lebar profil yang lebih besar, yaitu 23 (dari $n = -11$ sampai $n = 11$). Soliton dengan $\beta = 3$ memiliki lebar profil 25, yaitu dari $n = -12$ hingga $n = 12$. Hal ini menunjukkan bahwa nilai β memengaruhi lebar profil soliton *on-site*. Dari ketiga nilai parameter β yang disimulasikan, nilai yang lebih besar menghasilkan soliton dengan profil yang lebih lebar. Jika amplitudo dari ketiga solusi pada Gambar 1 diperhatikan, amplitudo soliton tidak dipengaruhi secara signifikan oleh nilai β untuk nilai σ yang sama.



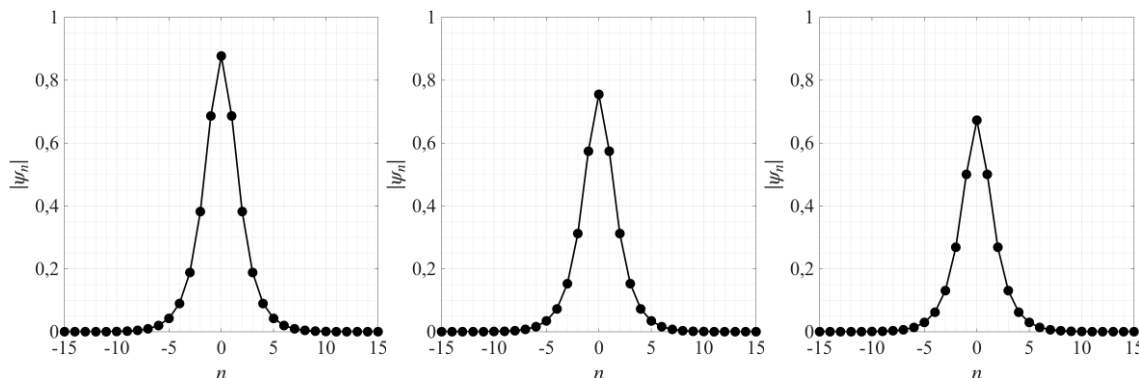
Gambar 1. Solusi persamaan S-DNLS tanpa potensial perangkap untuk $\Omega = 1; \sigma = 1.7$; serta beberapa β : $\beta = 2$ (kiri); $\beta = 2.5$ (tengah); dan $\beta = 3$ (kanan)

Gambar 2 menunjukkan sebaran nilai eigen persamaan dengan parameter $\sigma = 1,7$ dan $\beta = 2; 2,5; 3$ (dari kiri ke kanan). Dari Gambar 2 dapat diperhatikan bahwa sebaran nilai eigen untuk setiap variasi parameter membentang di sepanjang sumbu $\Re(\lambda) = 0$. Hal ini menunjukkan bahwa bagian riil dari nilai-nilai eigen yang diperoleh seluruhnya bernilai nol. Menurut kriteria kestabilan linier, ketiga solusi pada Gambar 1 stabil. Dengan memperhatikan Gambar 2 dapat diketahui bahwa nilai β memengaruhi sebaran nilai eigen yang diperoleh. Nilai-nilai eigen untuk $\beta = 2$ membentang di antara -5 dan 2. Rentang sebaran ini lebih sempit dibandingkan dengan nilai-nilai eigen untuk $\beta = 2,5$ yang membentang di antara -6 dan 2. Dari ketiga sebaran nilai eigen pada Gambar 2, nilai-nilai eigen yang paling lebar interval sebarannya adalah untuk $\beta = 3$. Jadi nilai β yang lebih besar memberikan rentang sebaran nilai eigen yang lebih lebar.



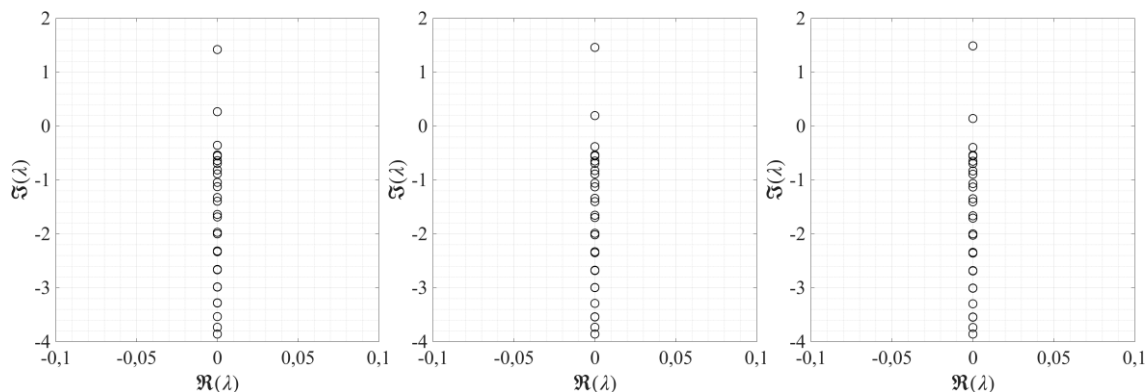
Gambar 2. Nilai eigen persamaan S-DNLS tanpa potensial perangkap untuk $\Omega = 1$; $\sigma = 1.7$; serta beberapa β : $\beta = 2$ (kiri); $\beta = 2,5$ (tengah); dan $\beta = 3$ (kanan)

Simulasi berikutnya dilakukan untuk parameter $\beta = 1.7$ dan nilai σ yang bervariasi, yaitu $\sigma = 2; 2,5; 3$. Dari Gambar 3 dapat diperhatikan bahwa solusi soliton yang diperoleh memiliki amplitudo yang berbeda-beda. Soliton dengan $\sigma = 2$ memiliki amplitudo paling tinggi dibandingkan dengan $\sigma = 2,5$ dan $\sigma = 3$. Begitu juga dengan soliton $\sigma = 2,5$, amplitudo soliton yang dihasilkan lebih tinggi dibandingkan $\sigma = 3$. Jadi dari ketiga variasi nilai parameter σ , nilai yang lebih besar menghasilkan soliton *on-site* dengan amplitudo yang lebih besar.



Gambar 3. Solusi persamaan S-DNLS tanpa potensial perangkap untuk $\Omega = 1; \beta = 1.7$; serta beberapa σ : $\sigma = 2$ (kiri); $\sigma = 2,5$ (tengah); dan $\sigma = 3$ (kanan)

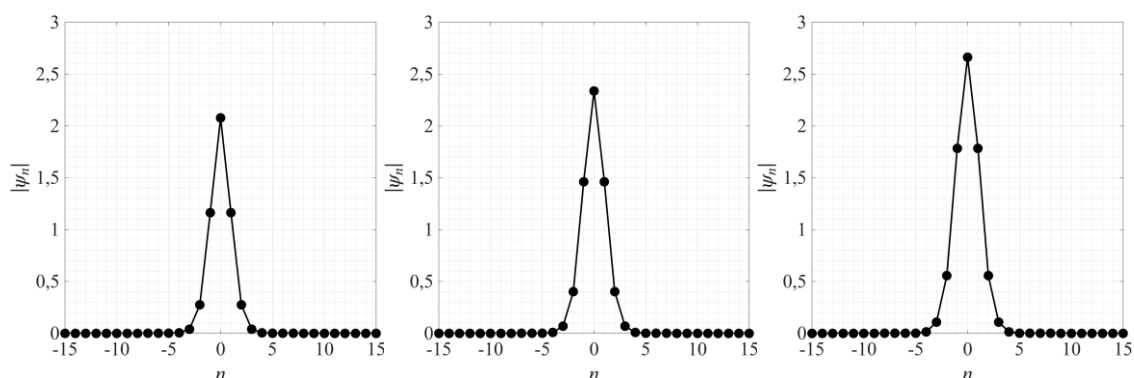
Sebaran nilai eigen pada Gambar 4 menjadi acuan dalam menentukan kestabilan linier solusi pada Gambar 3. Dari Gambar 4 dapat diketahui bahwa nilai-nilai eigen merentang di sepanjang sumbu $\Re(\lambda) = 0$ yang artinya bagian riil dari nilai-nilai eigen seluruhnya bernilai nol. Ini menjadi indikator bahwa solusi soliton yang diperoleh dengan $\beta = 1.7$ dan $\sigma = 2; 2,5; 3$ ketiganya adalah stabil. Berdasarkan Gambar 4, terlihat bahwa perbedaan rentang sebaran nilai eigen untuk parameter σ yang berbeda tidak signifikan. Akan tetapi perbedaan nilai parameter σ menyebabkan posisi nilai-nilai eigen mengalami pergeseran. Pada nilai eigen paling atas (bagian imajiner paling besar), semakin besar nilai σ , posisi nilai eigennya semakin ke atas. Perilaku sebaliknya terjadi pada nilai-nilai eigen yang lain. Semakin besar nilai σ , posisi nilai eigennya semakin bergeser turun.



Gambar 4. Nilai eigen persamaan S-DNLS tanpa potensial perangkap untuk $\Omega = 1; \beta = 1.7$; serta beberapa σ : $\sigma = 2$ (kiri); $\sigma = 2,5$ (tengah); dan $\sigma = 3$ (kanan)

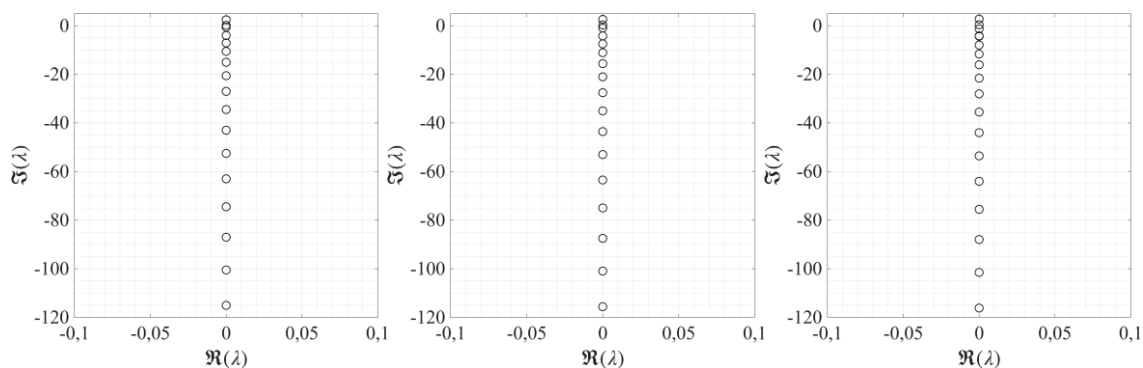
3.2 Solusi Persamaan S-DNLS Dengan Potensial Perangkap dan Kestabilannya

Solusi persamaan S-DNLS dengan potensial perangkap $V_n = n^2$ disimulasikan dengan nilai parameter yang sama dengan kasus tanpa potensial perangkap. Gambar 5 menunjukkan solusi persamaan dengan parameter $\beta = 1,7$ dan $\sigma = 2; 2,5; 3$. Dibandingkan dengan soliton tanpa potensial perangkap pada Gambar 1, soliton dengan potensial perangkap memiliki profil yang lebih sempit, yaitu dari $n = -4$ sampai $n = 4$. Berbeda dengan lebar soliton yang mengecil pada kasus potensial perangkap, amplitudo soliton menunjukkan perilaku sebaliknya. Pada persamaan S-DNLS dengan potensial perangkap $V_n = n^2$, soliton yang dihasilkan memiliki amplitudo yang lebih besar dibandingkan tanpa potensial perangkap.



Gambar 5. Solusi persamaan S-DNLS dengan potensial perangkap $V_n = n^2$ untuk $\Omega = 1$; $\sigma = 1.7$; serta beberapa β : $\beta = 2$ (kiri); $\beta = 2,5$ (tengah); dan $\beta = 3$ (kanan)

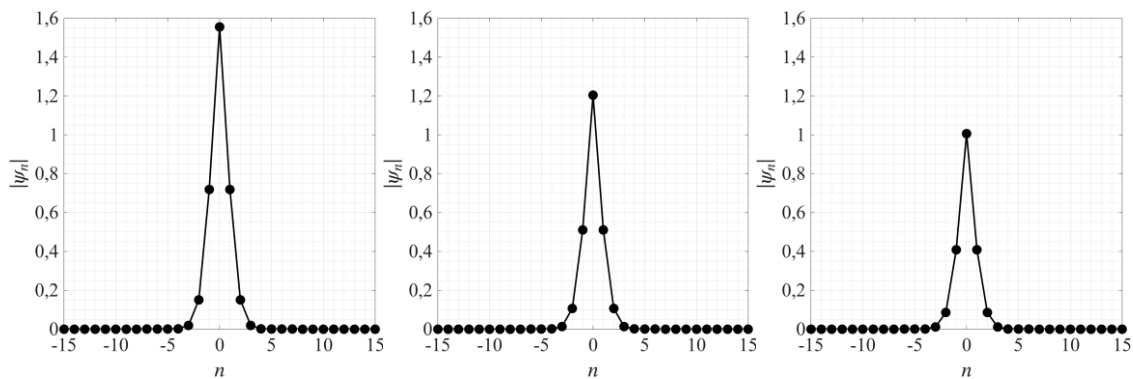
Dari Gambar 5 dapat diketahui bahwa nilai β memengaruhi amplitudo soliton secara signifikan pada kasus dengan potensial perangkap. Untuk $\beta = 2$, amplitudo soliton yang diperoleh lebih rendah dibandingkan dengan $\beta = 2,5$ dan $\beta = 3$. Begitu juga dengan soliton $\beta = 2,5$, amplitudonya lebih rendah dibandingkan soliton dengan $\beta = 3$. Dari soliton yang diperoleh untuk ketiga variasi nilai parameter β , dapat dipahami bahwa nilai β yang lebih besar menghasilkan soliton dengan amplitudo lebih tinggi.



Gambar 6. Nilai eigen persamaan S-DNLS dengan potensial perangkap $V_n = n^2$ untuk $\Omega = 1$; $\sigma = 1.7$; serta beberapa β : $\beta = 2$ (kiri); $\beta = 2,5$ (tengah); dan $\beta = 3$ (kanan)

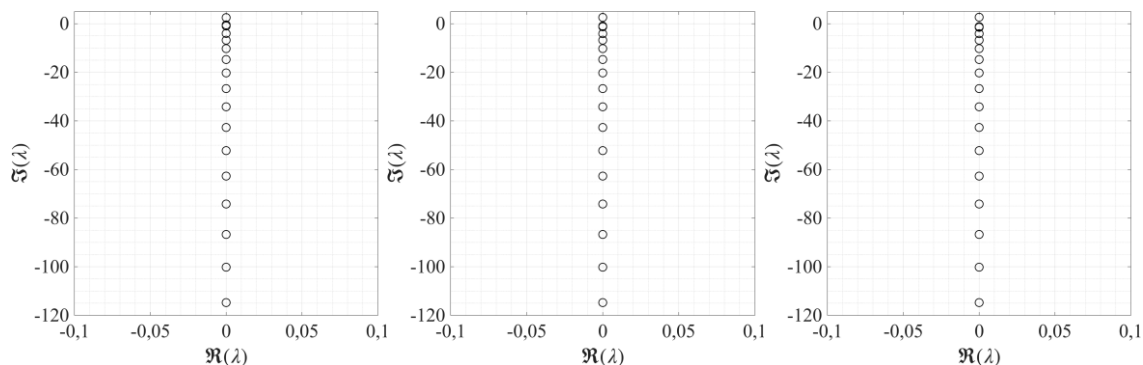
Gambar 6 menjadi acuan dalam menganalisis kestabilan solusi pada Gambar 5. Dari Gambar 6 dapat dilihat bahwa nilai-nilai eigen membentang di sepanjang sumbu $\Re(\lambda) = 0$. Hal ini

mengindikasikan bahwa nilai-nilai eigen untuk persamaan dengan tiga variasi nilai parameter ini memiliki bagian riil nol. Berdasarkan sebaran nilai eigen tersebut, dapat diidentifikasi bahwa soliton yang diperoleh untuk $\sigma = 1,7$ dan $\beta = 2; 2,5; 3$ pada kasus dengan potensial perangkap $V_n = n^2$ ketiganya stabil. Pada kasus dengan potensial perangkap ini, bagian imajiner dari nilai eigen tersebar pada interval yang jauh lebih lebar dibandingkan Gambar 2, yaitu di antara -120 hingga 5. Serupa dengan kasus tanpa potensial perangkap, parameter β yang lebih besar memberikan rentang sebaran nilai eigen yang lebih lebar.



Gambar 7. Solusi persamaan S-DNLS dengan potensial perangkap $V_n = n^2$ untuk $\Omega = 1$; $\beta = 1.7$; serta beberapa σ : $\sigma = 2$ (kiri); $\sigma = 2,5$ (tengah); dan $\sigma = 3$ (kanan)

Berikutnya simulasi dilakukan dengan menggunakan parameter $\beta = 1,7$ dan σ yang bervariasi, yaitu $\sigma = 2; 2,5; 3$. Serupa dengan simulasi sebelumnya, soliton yang diperoleh dengan potensial perangkap $V_n = n^2$ pada Gambar 7 memiliki profil yang lebih sempit dibandingkan Gambar 3 yang tidak menggunakan potensial perangkap. Dari Gambar 7 dapat dilihat bahwa soliton yang diperoleh memiliki lebar 9, yaitu dari $n = -4$ sampai $n = 4$. Begitu juga dengan amplitudonya, soliton dengan potensial perangkap memiliki amplitudo yang lebih tinggi dibandingkan tanpa potensial perangkap untuk variasi parameter σ yang sama.



Gambar 8. Nilai eigen persamaan S-DNLS dengan potensial perangkap $V_n = n^2$ untuk $\Omega = 1$; $\sigma = 1.7$; serta beberapa β : $\beta = 2$ (kiri); $\beta = 2,5$ (tengah); dan $\beta = 3$ (kanan)

Gambar 8 menunjukkan bahwa bagian riil dari nilai-nilai eigen persamaan S-DNLS dengan potensial perangkap $V_n = n^2$ untuk parameter $\beta = 1,7$ dan $\sigma = 2; 2,5; 3$ seluruhnya bernilai nol.

Hal ini menunjukkan bahwa ketiga solusi yang diperoleh pada Gambar 7 adalah stabil. Jika sebaran nilai eigen pada Gambar 8 dibandingkan dengan Gambar 4, dapat dilihat bahwa keberadaan potensial perangkap $V_n = n^2$ menyebabkan sebaran yang juga jauh lebih lebar dibandingkan tanpa potensial perangkap. Berdasarkan Gambar 8, sebaran nilai eigen untuk nilai parameter σ bervariasi terlihat hampir identik seluruhnya. Akan tetapi pada nilai-nilai eigen di sekitar sumbu imajiner 0, perilaku nilai-nilai eigennya serupa dengan yang terjadi pada kasus tanpa potensial perangkap. Pada nilai eigen paling atas, semakin besar σ , nilai eigennya semakin ke atas. Perilaku sebaliknya terjadi pada nilai-nilai eigen di bawahnya, yaitu semakin besar parameter σ , nilai eigennya semakin bergeser ke bawah.

4 Simpulan

Solusi soliton *on-site* untuk persamaan S-DNLS tanpa maupun dengan potensial perangkap berhasil ditemukan menggunakan metode Newton. Analisis melalui perturbasi linier menunjukkan bahwa solusi-solusi soliton *on-site* yang diperoleh semuanya stabil. Simulasi menunjukkan bahwa nilai parameter β berbanding lurus dengan lebar soliton pada kasus tanpa potensial perangkap. Pada kasus dengan potensial perangkap $V_n = n^2$, nilai parameter β berbanding lurus dengan amplitudo soliton. Nilai σ berbanding terbalik dengan amplitudo soliton baik pada persamaan tanpa maupun dengan potensial perangkap. Keberadaan potensial perangkap secara umum membuat lebar profil soliton lebih sempit dan membuat amplitudo soliton lebih besar.

5 Daftar Pustaka

- [1] A. Maluckov, L. Hadžievski, B. A. Malomed, dan L. Salasnich, “Solitons in the discrete nonpolynomial Schrödinger equation,” *Phys Rev A (Coll Park)*, vol. 78, no. 1, hlm. 013616, Jul 2008, doi: 10.1103/PhysRevA.78.013616.
- [2] R. Khomeriki, “Nonlinear Band Gap Transmission in Optical Waveguide Arrays,” *Phys Rev Lett*, vol. 92, no. 6, hlm. 063905, 2004, doi: 10.1103/PhysRevLett.92.063905.
- [3] R. Asfa, A. F. Azadi, Z. P. Netris, dan M. Syafwan, “Aproksimasi Variasional untuk Soliton Onsite pada Persamaan Schrödinger Nonlinier Diskrit Kubik-Kuintik,” *Limits: J. Math. and Its Appl.*, vol. 15, no. 2, hlm. 113–126, Nov 2018, doi: 10.12962/limits.v15i2.3878.
- [4] L. Zhang dan S. Ma, “Ground state solutions for periodic discrete nonlinear Schrödinger equations with saturable nonlinearities,” *Adv Differ Equ*, vol. 2018, no. 1, hlm. 1, Des 2018, doi: 10.1186/s13662-018-1574-2.

-
- [5] N. Z. Putri, R. Asfa, A. A. Fitri, I. Bakri, dan M. Syafwan, “Variational approximations for intersite soliton in a cubic-quintic discrete nonlinear Schrödinger equation,” dalam *Journal of Physics: Conference Series*, Institute of Physics Publishing, Nov 2019, hlm. 012015. doi: 10.1088/1742-6596/1317/1/012015.
- [6] H. Qausar, M. Ramli, S. Munzir, M. Syafwan, H. Susanto, dan V. Halfiani, “Nontrivial On-site Soliton Solutions for Stationary Cubic-Quintic Discrete Nonlinear Schrodinger Equation,” *Int J Appl Math (Sofia)*, vol. 50, no. 2, Jun 2020.
- [7] H. Qausar, M. Ramli, S. Munzir, M. Syafwan, dan D. Fadhiliani, “Soliton solution of stationary discrete nonlinear Schrödinger equation with the cubic-quintic nonlinearity,” *IOP Conf Ser Mater Sci Eng*, vol. 1087, no. 1, hlm. 012083, Feb 2021, doi: 10.1088/1757-899x/1087/1/012083.
- [8] D. Hennig dan J. Cuevas-Maraver, “Discrete Derivative Nonlinear Schrödinger Equations,” *Mathematics*, vol. 13, no. 1, hlm. 1–25, Jan 2025, doi: 10.3390/math13010105.
- [9] M. Ramli, M. Ikhwan, N. Nazaruddin, H. A. Mardi, T. Usman, dan E. Safitri, “Multi-peak soliton dynamics and decoherence via the attenuation effects and trapping potential based on a fractional nonlinear Schrödinger cubic quintic equation in an optical fiber,” *Alexandria Engineering Journal*, vol. 107, hlm. 507–520, Nov 2024, doi: 10.1016/j.aej.2024.07.037.
- [10] A. Kasman, *Glimpses of Soliton Theory The Algebra and Geometry of Nonlinear PDEs, Second Edition*, 2nd ed. Providence: American Mathematical Society, 2023.
- [11] G. Arora, R. Rani, dan H. Emadifar, “Soliton: A dispersion-less solution with existence and its types,” *Heliyon*, vol. 8, no. 12, hlm. e12122, Des 2022, doi: 10.1016/j.heliyon.2022.e12122.
- [12] N. J. Zabusky dan M. D. Kruskal, “Interaction of ‘solitons’ in a collisionless plasma and the recurrence of initial states,” *Phys Rev Lett*, vol. 15, no. 6, hlm. 240–243, Agu 1965.
- [13] P. G. Kevrekidis, *The Discrete Nonlinear Schrödinger Equation*. Berlin: Springer, 2009. [Daring]. Tersedia pada: www.mpe-garching.mpg.de/index.html
- [14] Zekeriya. Altaç, *Numerical methods for scientists and engineers : with pseudocodes*. Boca Raton: CRC Press, 2025.
- [15] G. C. Layek, *An Introduction to Dynamical Systems and Chaos Second Edition*, 2nd ed. Singapore: Springer Nature, 2024.