

Pelabelan Titik *Bimagic* Terbalik Super pada *Path Related Graphs*

Amalia Rusita¹, Alifah Prameswari Yosi², Titin Sri Martini^{3*}

^{1, 2, 3}Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Sebelas Maret Surakarta Indonesia

e-mail: titinsmartini@staff.uns.ac.id

Diajukan: 27 Januari 2026, Diperbaiki: 22 Maret 2026, Diterima: 7 April 2026

Abstrak

Graf $H = (V(H), E(H))$ adalah graf terhubung, tak berarah, dan sederhana dengan himpunan titik $V(H)$ dan himpunan sisi $E(H)$. Graf H dengan q titik dan p sisi dikatakan memuat pelabelan titik *bimagic* terbalik jika terdapat pemetaan bijektif $\beta : V(H) \cup E(H) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, q + p\}$ sehingga untuk $\forall w, u \in V(H)$, $\{\beta(w) - \sum \beta(wu) \mid w, u \in V(H)\} = \{\delta_1, \delta_2\}$ untuk suatu δ_1 dan δ_2 yang berbeda. Jika sisi-sisi pada graf H diberi label $\{1, 2, 3, \dots, p\}$, maka pelabelan ini disebut pelabelan titik *bimagic* terbalik super. Graf yang memuat pelabelan titik *bimagic* terbalik super disebut graf titik *bimagic* terbalik super. Konsep pelabelan titik *bimagic* terbalik super pada pelabelan graf muncul karena terdapat graf yang memiliki sifat pelabelan titik *bimagic* terbalik super tetapi tidak memiliki sifat pelabelan titik *magic* terbalik super. Selain itu, untuk memperluas jangkauan nilai konstanta yang awalnya hanya positif menjadi non negatif. Pada penelitian ini diinvestigasi pelabelan titik *bimagic* terbalik super pada *path related graph* yaitu graf *path* P_q , graf *brush* B_q dan graf *centipede tree* $C_{q,2}$. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah konstruksi eksplisit fungsi bijektif β . Diperoleh hasil, graf *path*, graf *brush*, dan graf *centipede tree* adalah graf titik *bimagic* terbalik super dengan konstanta *bimagic* graf *path* adalah $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = q + 2$, graf *brush* adalah $\delta_1 = q$, $\delta_2 = q + 1$, dan graf *centipede tree* untuk q ganjil adalah $\delta_1 = \frac{q+3}{2}$, $\delta_2 = 2q$, dan untuk q genap adalah $\delta_1 = \frac{q}{2}$, $\delta_2 = 2q$.

Kata Kunci: graf *brush*, graf *centipede tree*, graf *path*, pelabelan titik *bimagic* terbalik super.

Abstract

A graph $H(V(H), E(H))$ is a connected, undirected, and simple graph where V is a set of vertices and E is a set of edges. Graph H with q vertices and p edges is said to admit a reverse vertex bimagic labeling if there exists a bijection $\beta : V(H) \cup E(H) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, q + p\}$ such that for each $w \in V$, $\{\beta(w) - \sum \beta(wu) \mid w, u \in V(H)\} = \{\delta_1, \delta_2\}$ for two distinct δ_1 and δ_2 . Then, reverse vertex bimagic labeling is called super if label of edges are $\{1, 2, 3, \dots, p\}$. A graph H that admits reverse super vertex bimagic labeling is called reverse super vertex bimagic graph. The concept of reverse super vertex bimagic labeling in graph labeling arises from the existence of graphs that admit a reverse super vertex bimagic labeling but do not admit a reverse super vertex magic labeling. In addition, this concept aims to extend the range of magic constants, which were initially restricted to positive values, to include non-negative values. In this research, we investigated reverse super vertex bimagic labeling of path related graph, there are path graph P_q , brush graph B_q and centipede tree graph $C_{q,2}$. The method used in this research is an explicit construction of a bijective function β . The results show that path graph, brush graph, and centipede tree graph are reverse super vertex bimagic graphs with the bimagic sums of each being $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = q + 2$, for path graph, $\delta_1 = q$, $\delta_2 = q + 1$, for brush graph, and $\delta_1 = \frac{q}{2}$, $\delta_2 = 2q$, for centipede tree graph.

Keywords: brush graph, centipede tree graph, path graph, reverse super vertex bimagic labeling.

1 Pendahuluan

Pelabelan graf menurut Wallis [1] adalah pemetaan dari elemen-elemen graf yaitu titik, sisi atau titik dan sisi ke himpunan bilangan bulat positif atau non-negatif. Pelabelan *magic* diawali dari publikasi Sedláček [2] yang termotivasi dari bujursangkar *magic* dalam teori bilangan, yaitu fungsi dari himpunan sisi suatu graf ke himpunan bilangan bulat non negatif sehingga label sisi disekitar titik manapun di graf G adalah sama. Jika G dapat dilabeli dengan suatu pelabelan *magic*, maka graf G disebut graf *magic*. Menurut Gallian [3], terdapat tiga tipe pelabelan graf berdasarkan domain pemetaan, yaitu jika domain pelabelan adalah titik saja, sisi saja atau titik dan sisi sekaligus maka masing-masing disebut pelabelan titik, pelabelan sisi atau pelabelan total. Pelabelan total titik dimulai dari pelabelan titik *magic*, pelabelan titik *bimagic* dan pelabelan titik *trimagic*. Pada pelabelan titik *magic*, dikonstruksi fungsi bijektif $\beta: V(H) \cup E(H) \rightarrow \{1, 2, \dots, |V(H)| + |E(H)|\}$ sehingga nilai $\{\beta(w) + \sum \beta(wu) | w, u \in V(H)\} = \{k\}$. Babujee dan Babitha [4] mendefinisikan pelabelan titik *bimagic* yaitu pemetaan bijektif $\beta: V(H) \cup E(H) \rightarrow \{1, 2, \dots, |V(H)| + |E(H)|\}$ sehingga $\{\beta(w) + \sum \beta(wu) | \forall w, u \in V(H)\} = \{k_1, k_2\}$ untuk suatu k_1, k_2 yang berbeda. Jika sisi diberi label $\{1, 2, 3, \dots, |E(H)|\}$ maka pelabelan titik *bimagic* disebut super. Murugesan dan Amutha [5] telah membuktikan graf *bistar* $B_{n,n}$ memuat pelabelan titik *bimagic* untuk $n > 2$. Selanjutnya telah diperoleh hasil dari penelitian pada [6] yaitu graf bintang $K_{1,n}$, graf *bistar* $B_{n,n}$, $n > 1$, graf siklus C_n , graf roda W_n , graf *crown* $C_n K_1$, graf $(3, n)$ *kite*, $n > 3$, n ganjil, dan graf *fan* F_n semuanya memuat pelabelan titik *bimagic*.

Ramana dan Basha [7] memperkenalkan konsep pelabelan titik *magic* terbalik. Pelabelan titik *magic* terbalik adalah pemetaan bijektif $\beta: V(H) \cup E(H) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, |V(H)| + |E(H)|\}$ sehingga nilai $\{\beta(w) - \sum \beta(wu) | \forall w, u \in V(H)\} = \{\delta\}$. Jika sisi diberi label $\{1, 2, 3, \dots, |E(H)|\}$ maka pelabelan titik *magic* terbalik disebut super. Penelitian Raju dan Basha [8] membuktikan graf *path* P_n dan graf *cycle* C_n untuk $n \geq 3$ memuat pelabelan titik *magic* terbalik. Ditahun yang sama, Raju and Basha [9] memperoleh hasil pelabelan titik *magic* terbalik graf *kite*. Selanjutnya pada tahun 2019 Amuthavalli dan Sugapriya [10] meneliti pelabelan titik *trimagic* terbalik yaitu pemetaan bijektif $\beta: V(H) \cup E(H) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, |V(H)| + |E(H)|\}$ sehingga $\{\beta(w) - \sum \beta(wu) | \forall w, u \in V(H)\} = \{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ untuk suatu $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ yang berbeda. Pada penelitian ini Amuthavalli dan Sugapriya memperoleh hasil *union* graf *bistar*, graf *hoffman tree*, *union* dua graf *hoffman trees*, *union* dua graf *crown* dan *union* graf *bistar* dan graf *crown* adalah graf-graf yang memuat pelabelan titik *trimagic* terbalik super.

Berdasarkan penelitian Babujee and Babitha [4], yaitu pelabelan titik *bimagic*, Ramana dan Basha [7] yaitu pelabelan titik *magic* terbalik dan Amuthavalli dan Sugapriya [10] yaitu pelabelan

titik *trimagic* terbalik, penelitian ini mendefinisikan konsep baru yaitu pelabelan titik *bimagic* terbalik super. Suatu graf $H = (V(H), E(H))$ memuat pelabelan titik *bimagic* terbalik jika terdapat pemetaan bijektif $\beta: V(H) \cup E(H) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, |V(H)| + |E(H)|\}$ sehingga $\{\beta(w) - \sum \beta(wu) \mid \forall w, u \in V(H)\} = \{\delta_1, \delta_2\}$ untuk suatu δ_1, δ_2 yang berbeda. Pelabelan titik *bimagic* disebut super jika sisi diberi label himpunan bilangan $\{1, 2, 3, \dots, |E(H)|\}$. Dalam penelitian ini diinvestigasi eksistensi pelabelan titik *bimagic* terbalik super pada graf *path*, graf *brush*, dan graf *centipede tree*.

2 Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan adalah studi literatur dan analisis deduktif. Studi literatur dilakukan dengan mengkaji berbagai referensi yang berkaitan dengan teori graf dan pelabelan graf. Selanjutnya, analisis deduktif digunakan untuk mengonstruksi fungsi pelabelan secara eksplisit serta membuktikan bahwa fungsi tersebut memenuhi sifat pelabelan yang diteliti.

3 Hasil dan Pembahasan

Definisi 1. Suatu graf $H = (V(H), E(H))$ memuat pelabelan titik *bimagic* terbalik jika terdapat pemetaan bijektif $\beta: V(H) \cup E(H) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, |V(H)| + |E(H)|\}$ sehingga $\{\beta(w) - \sum \beta(wu) \mid \forall w, u \in V(H)\} = \{\delta_1, \delta_2\}$ untuk suatu δ_1, δ_2 yang berbeda.

Pelabelan dilakukan dengan mengkonstruksi pemetaan bijektif $\beta: V(H) \cup E(H) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, |V(H)| + |E(H)|\}$. Dalam hal ini sisi diberi label dari himpunan bilangan $\{1, 2, 3, \dots, |E(H)|\}$ dan titik diberi label bilangan $\{|E(H)| + 1, |E(H)| + 2, \dots, |E(H)| + |V(H)|\}$, sehingga kondisi pelabelan titik *bimagic* terbalik super dipenuhi. Dalam mengkonstruksi label titik dan label sisi, untuk setiap titik $\forall w, u \in V(H)$ diperiksa nilai $\{\beta(w) - \sum \beta(wu)\} = \{\delta_1, \delta_2\}$ untuk suatu δ_1, δ_2 yang berbeda. Dalam hal ini H adalah graf *path* P_q atau graf *brush* B_q atau graf *centipede tree* $C_{q,2}$. Pada penelitian ini, pembagian kasus berdasarkan *order* suatu graf yaitu *order* genap atau *order* ganjil dilakukan karena terkait dengan struktur graf. Diperlukan strategi konstruksi pelabelan yang menjamin diperolehnya tepat dua konstanta *magic* yang berbeda.

Definisi 2. [11] Graf *path* adalah graf yang isomorfis dengan graf H yang mempunyai himpunan titik $V(H) = \{w_i \mid 1 \leq i \leq q, q \geq 2\}$ dan himpunan sisi $E(H) = \{w_i w_{i+1} \mid 1 \leq i \leq q - 1\}$. Selanjutnya graf *path* dinotasikan dengan P_q .

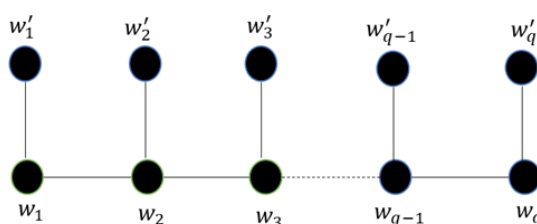
Berikut diberikan ilustrasi graf *path* P_q pada Gambar 1.



Gambar 1. Graf path P_q

Definisi 3.[12] *Graf brush* adalah graf yang isomorfis dengan graf H yang mempunyai himpunan titik $V(H) = \{w_i | 1 \leq i \leq q, q \geq 2\} \cup \{w'_i | 1 \leq i \leq q, q \geq 2\}$ dan himpunan sisi $E(H) = \{w_i w_{i+1} | 1 \leq i \leq q - 1\} \cup \{w_i w'_i | 1 \leq i \leq q\}$. Selanjutnya graf brush dinotasikan dengan B_q .

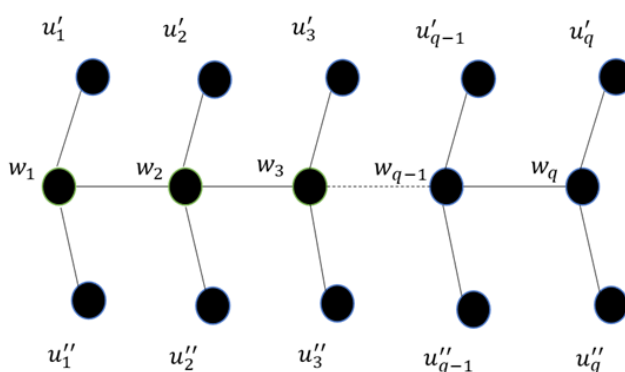
Gambar 2 menunjukkan graf brush B_q .



Gambar 2. Graf Brush B_q

Definisi 4.[13] *Graf centipede tree* $C_{q,2}$ adalah graph yang isomorfis dengan graf H yang mempunyai himpunan titik $V(H) = \{w_i | 1 \leq i \leq q, q \geq 2\} \cup \{u'_i | 1 \leq i \leq q, q \geq 2\} \cup \{u''_i | 1 \leq i \leq q, q \geq 2\}$ dan himpunan sisi $E(H) = \{w_i w_{i+1} | 1 \leq i \leq q - 1\} \cup \{w_i u'_i | 1 \leq i \leq q\} \cup \{w_i u''_i | 1 \leq i \leq q\}$. Selanjutnya graf centipede tree dinotasikan dengan $C_{q,2}$.

Graf centipede tree $C_{q,2}$ ditunjukkan pada Gambar 3.



Gambar 3. Graf Centipede Tree $C_{q,2}$

3.1 Pelabelan titik *bimagic* terbalik pada suatu graf.

Suatu graf $H = (V(H), E(H))$ memuat pelabelan titik *bimagic* terbalik jika terdapat pemetaan bijektif $\beta: V(H) \cup E(H) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, |V(H)| + |E(H)|\}$ sehingga $\{\beta(w) - \sum \beta(wu) | \forall w, u \in V(H)\} = \{\delta_1, \delta_2\}$ untuk suatu δ_1, δ_2 yang berbeda. Pelabelan disebut super jika sisi diberi label himpunan bilangan $\{1, 2, 3, \dots, |E(H)|\}$.

Teorema 1. *Graf path P_q adalah graf titik bimagic terbalik super untuk bilangan $q \geq 2$.*

Bukti. Diberikan graf path P_q dengan himpunan titik $V(P_q) = \{w_i \mid 1 \leq i \leq q, q \geq 2\}$ dan himpunan sisi $E(P_q) = \{w_i w_{i+1} \mid 1 \leq i \leq q-1\}$. Graf P_q memiliki q titik dan $q-1$ sisi, sehingga graf P_q memiliki label $\{1, 2, 3, \dots, 2q-1\}$. Pelabelan titik *bimagic* terbalik super pada graf P_q dilakukan dengan ketentuan sisi diberi label dari himpunan bilangan $\{1, 2, 3, \dots, q-1\}$ dan titik diberi label dari himpunan bilangan $\{q, q+1, q+2, \dots, 2q-1\}$. Selanjutnya pembuktian pelabelan titik *bimagic* terbalik super dilakukan dengan mengkonstruksi pemetaan bijektif $\beta: V(P_q) \cup E(P_q) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 2q-1\}$ yang memenuhi kondisi pelabelan titik *bimagic* terbalik super. Pembuktian ini terbagi dalam dua kasus berdasarkan nilai q .

Kasus 1. Untuk q genap, $q \geq 2$.

Pada Kasus 1, dikonstruksi pemetaan bijektif $\beta: V(P_q) \cup E(P_q) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 2q-1\}$ dengan label titik dan label sisi masing-masing adalah,

label titik

$$\beta(w_i) = \begin{cases} q + 2i - 1, & 1 \leq i \leq \frac{q}{2}, \\ 2i, & \frac{q}{2} + 1 \leq i \leq q-1, \\ i, & i = q, \end{cases}$$

label sisi

$$\beta(w_i w_{i+1}) = i, \quad 1 \leq i \leq q-1.$$

Untuk menunjukkan bahwa pelabelan β merupakan pelabelan titik *bimagic* terbalik super, diselidiki selisih label tiap titik dengan jumlahan label sisi-sisi yang *incident* dengan titik tersebut yaitu $\beta(w) - \sum \beta(wu)$ untuk setiap titik $w, u \in V(P_q)$. Diperoleh

a. untuk titik $w_i, i = 1$,

$$\begin{aligned} \beta(w_i) - \beta(w_i w_{i+1}) &= q + 2i - 1 - (i) \\ &= q = \delta_2, \end{aligned}$$

b. untuk titik $w_i, 2 \leq i \leq \frac{q}{2}$,

$$\begin{aligned} \beta(w_i) - (\beta(w_{i-1} w_i) + \beta(w_i w_{i+1})) &= q + 2i - 1 - (i - 1 + i) \\ &= q = \delta_2, \end{aligned}$$

c. untuk titik $w_i, \frac{q}{2} + 1 \leq i \leq q-1$,

$$\beta(w_i) - (\beta(w_{i-1} w_i) + \beta(w_i w_{i+1})) = 2i - (i + (i + 1)) = 1 = \delta_1,$$

d. Untuk titik $w_i, i = q$,

$$\beta(w_i) - (\beta(w_{i-1} w_i)) = i - (i - 1)$$

$$= 1 = \delta_1.$$

Untuk Kasus 1, dengan q genap dan $q \geq 2$, diperoleh $\delta_1 = 1$ dan $\delta_2 = q$.

Kasus 2. Untuk q ganjil, $q \geq 2$.

Pada Kasus 2, dikonstruksi pemetaan bijektif $\beta: V(P_q) \cup E(P_q) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 2q - 1\}$ dengan label titik adalah,

$$\beta(w_i) = \begin{cases} q + 2i, & 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor, \\ 2i, & \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor + 1 \leq i \leq q - 1, \\ q, & i = q, \end{cases}$$

dan label sisi

$$\beta(w_i w_{i+1}) = i, \quad 1 \leq i \leq q - 1.$$

Berikut ditunjukkan bahwa pelabelan β pada graf *path* memenuhi syarat pelabelan titik *bimagic* terbalik super yaitu $\{\beta(w) - \sum \beta(wu) \mid \forall w, u \in V(P_q)\}$.

a. Perhatikan titik w_i , $i = 1$,

$$\beta(w_i) - \beta(w_i w_{i+1}) = q + 2i - (i) = q + 1 = \delta_2.$$

b. Untuk titik w_i , $2 \leq i \leq \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor$,

$$\beta(w_i) - (\beta(w_{i-1} w_i) + \beta(w_i w_{i+1})) = q + 2i - ((i - 1) + i) = q + 1 = \delta_2.$$

c. Untuk titik w_i , $\left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor + 1 \leq i \leq q - 1$,

$$\beta(w_i) - (\beta(w_{i-1} w_i) + \beta(w_i w_{i+1})) = 2i - ((i - 1) + i) = 1 = \delta_1.$$

d. Untuk titik w_i , $i = q$,

$$\beta(w_i) - (\beta(w_{i-1} w_i)) = i - (i - 1) = 1 = \delta_1.$$

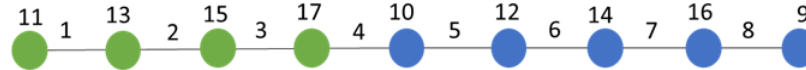
Pada Kasus 2, dengan q ganjil dan $q \geq 2$ diperoleh $\delta_1 = 1$ dan $\delta_2 = q + 1$.

Berdasarkan Kasus 1, yaitu untuk q adalah genap diperoleh $\{\beta(w) - \sum \beta(wu) \mid \forall w, u \in V(P_q)\} = \{1, q\}$. Dalam hal ini $\delta_1 = 1$ dan $\delta_2 = q$. Untuk Kasus 2, yaitu untuk q adalah ganjil diperoleh $\{\beta(w) - \sum \beta(wu) \mid \forall w, u \in V(P_q)\} = \{1, q + 1\}$. Dalam hal ini $\delta_1 = 1$ dan $\delta_2 = q + 1$. Oleh karena terdapat dua konstanta *magic* yang berbeda baik dalam Kasus 1 maupun dalam Kasus 2, maka graf P_q memuat pelabelan titik *bimagic* terbalik. Selain itu, sisi-sisi pada graf P_q sebanyak $q - 1$ diberi label dengan himpunan bilangan $\{1, 2, 3, \dots, q - 1\}$, dan titik-titik pada graf P_q sebanyak q diberi label dengan himpunan bilangan $\{q, q + 1, q + 2, q + 3, \dots, 2q - 1\}$, sehingga graf *path* P_q memuat pelabelan titik *bimagic* terbalik super dan graf *path* P_q disebut graf titik *bimagic* terbalik super. ■

Diberikan ilustrasi pada Gambar 4 dan Gambar 5 masing-masing adalah pelabelan titik *bimagic* terbalik super graf *path* P_8 dan P_9 .



Gambar 4. Pelabelan Titik *Bimagic* Terbalik Super Graf *Path* P_8 dengan $\delta_1 = 1$ dan $\delta_2 = 8$



Gambar 5. Pelabelan Titik *Bimagic* Terbalik Super Graf *Path* P_9 dengan $\delta_1 = 1$ dan $\delta_2 = 10$

Teorema 2. Graf *brush* B_q adalah graf titik *bimagic* terbalik super untuk bilangan $q \geq 2$.

Bukti. Diberikan graf *brush* B_q dengan himpunan titik $V(B_q) = \{w_i | 1 \leq i \leq q, q \geq 2\} \cup \{w'_i | 1 \leq i \leq q, q \geq 2\}$ dan himpunan sisi $E(B_q) = \{w_i w_{i+1} | 1 \leq i \leq q-1\} \cup \{w_i w'_i | 1 \leq i \leq q\}$. Graf B_q memiliki $2q$ titik dan $2q-1$ sisi, sehingga graf B_q memiliki label $\{1, 2, 3, \dots, 4q-1\}$. Pelabelan titik *bimagic* terbalik super pada graf B_q dilakukan dengan ketentuan sisi diberi label dari $1, 2, 3, \dots, 2q-1$ dan titik diberi label dari $2q, 2q+1, 2q+2, \dots, 4q-1$. Dalam pembuktian eksistensi pelabelan titik *bimagic* terbalik super dilakukan dengan mengkonstruksi pemetaan bijektif $\beta: V(B_q) \cup E(B_q) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 4q-1\}$ yang memenuhi kondisi pelabelan titik *bimagic* terbalik super, dengan label titik adalah

$$\beta(w_i) = \begin{cases} 3q+i, & 1 \leq i \leq q-1, \\ 3q, & i = q, \end{cases}$$

$$\beta(w'_i) = 3q-i, \quad 1 \leq i \leq q,$$

dan label sisi,

$$\beta(w_i w_{i+1}) = i, \quad 1 \leq i \leq q-1,$$

$$\beta(w_i w'_i) = 2q-i, \quad 1 \leq i \leq q.$$

Berikut ditunjukkan bahwa pelabelan β pada graf *brush* B_q dengan $q \geq 2$ memenuhi kondisi pelabelan titik *bimagic* terbalik.

a. Perhatikan titik $w_i, i = 1$,

$$\begin{aligned} \beta(w_i) - (\beta(w_i w_{i+1}) + \beta(w_i w'_i)) &= 3q+i - (i + (2q-1)) \\ &= q+1 = \delta_2. \end{aligned}$$

b. Untuk titik $w_i, 2 \leq i \leq q-1$,

$$\beta(w_i) - (\beta(w_{i-1} w_i) + \beta(w_i w_{i+1}) + \beta(w_i w'_i)) = 3q+i - ((i-1) + i + (2q-i))$$

$$= q + 1 = \delta_2.$$

c. Untuk titik w'_i , $1 \leq i \leq q$,

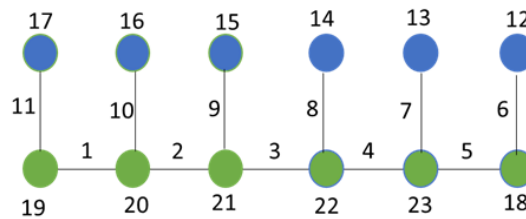
$$\beta(w'_i) - (\beta(w_i w'_i)) = 3q - i - (2q - i) = q = \delta_1.$$

d. Perhatikan titik w_i , $i = q$,

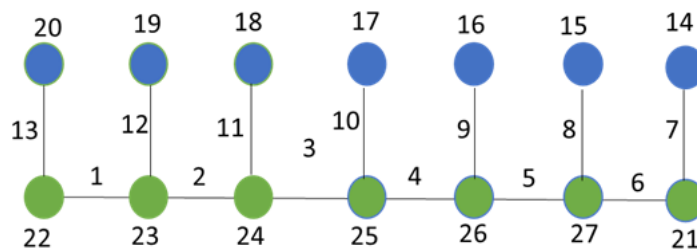
$$\begin{aligned} \beta(w_q) - (\beta(w_{q-1} w_q) + \beta(w_q w'_q)) &= 3q - (q - 1 + (2q - q)) \\ &= q + 1 = \delta_2. \end{aligned}$$

Dapat diperhatikan bahwa untuk setiap titik $w, u \in V(B_q)$ diperoleh $\{\beta(w) - \sum \beta(wu) \mid \forall w, u \in V(B_q)\} = \{\delta_1, \delta_2\}$ untuk suatu δ_1, δ_2 yang berbeda, karena itu graf B_q dapat dilabeli dengan pelabelan titik *bimagic* terbalik. Selanjutnya graf B_q yang mempunyai sisi sebanyak $2q - 1$ diberi label dengan himpunan bilangan $\{1, 2, 3, \dots, 2q - 1\}$, dan titik sebanyak $2q$ diberi label dengan himpunan bilangan $\{2q, 2q + 1, 2q + 2, 2q + 3, \dots, 4q - 1\}$, sehingga graf B_q memuat pelabelan titik *bimagic* terbalik super dan graf B_q disebut graf titik *bimagic* terbalik super. ■

Gambar 6 dan Gambar 7 menunjukkan ilustrasi pelabelan titik *bimagic* terbalik super graf *brush* B_6 dan B_7 .



Gambar 6. Pelabelan Titik *Bimagic* Terbalik Super Graf *Brush* B_6 dengan $\delta_1 = 6$ dan $\delta_2 = 7$



Gambar 7. Pelabelan Titik *Bimagic* Terbalik Super Graf *Brush* B_7 dengan $\delta_1 = 7$ dan $\delta_2 = 8$

Teorema 3. Graf *centipede tree* $C_{q,2}$, $q \geq 2$ adalah graf titik *bimagic* terbalik super.

Bukti. Diberikan graf *centipede tree* $C_{q,2}$ dengan himpunan titik $V(C_{q,2}) = \{w_i \mid 1 \leq i \leq q, q \geq 2\} \cup \{u'_i \mid 1 \leq i \leq q, q \geq 2\} \cup \{u''_i \mid 1 \leq i \leq q, q \geq 2\}$ dan himpunan sisi $E(C_{q,2}) = \{w_i w_{i+1} \mid 1 \leq i \leq q - 1\} \cup \{w_i u'_i \mid 1 \leq i \leq q\} \cup \{w_i u''_i \mid 1 \leq i \leq q\}$. Graf $C_{q,2}$ memiliki titik sebanyak $3q$ dan sisi sebanyak $3q - 1$, sehingga graf $C_{q,2}$ memiliki label $\{1, 2, 3, \dots, 6q - 1\}$.

Pelabelan titik *bimagic* terbalik super pada graf $C_{q,2}$ dilakukan dengan ketentuan sisi diberi label dari $1, 2, 3, \dots, 3q - 1$ dan titik diberi label dari $3q, 3q + 1, 3q + 2, \dots, 6q - 1$. Dalam pembuktian eksistensi pelabelan titik *bimagic* terbalik super dilakukan dengan mengkonstruksi pemetaan bijektif $\beta: V(C_{q,2}) \cup E(C_{q,2}) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 6q - 1\}$ yang memenuhi kondisi pelabelan titik *bimagic* terbalik super. Dalam pembuktian ini terdapat 3 kasus yang perlu diperhatikan berdasarkan nilai q .

Kasus 1. Untuk $q = 3$.

Pada Kasus 1, dikonstruksi pemetaan bijektif $\beta: V(C_{q,2}) \cup E(C_{q,2}) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 6q - 1\}$ sehingga label titik adalah

$$\begin{aligned}\beta(w_i) &= \begin{cases} 4q + 2i + 1, & 1 \leq i \leq q - 1, \\ 5q + 1, & i = q, \end{cases} \\ \beta(u'_i) &= 4q - i, \quad 1 \leq i \leq q, \\ \beta(u''_i) &= \frac{7q + 2i + 1}{2}, \quad 1 \leq i \leq q, \end{aligned}$$

dan label sisi

$$\begin{aligned}\beta(w_i w_{i+1}) &= i, \quad 1 \leq i \leq q - 1, \\ \beta(w_i u'_i) &= 2q - i, \quad 1 \leq i \leq q. \\ \beta(w_i u''_i) &= \frac{3q + 2i + 1}{2}, \quad 1 \leq i \leq q. \end{aligned}$$

Selanjutnya ditunjukkan untuk setiap titik pada graf $C_{q,2}$, dihitung selisih label titik dengan jumlahan label sisi-sisi yang *incident* dengan titik tersebut. Dalam hal ini diperoleh

a. untuk titik $w_i, i = 1$,

$$\begin{aligned}\beta(w_i) - (\beta(w_i w_{i+1}) + \beta(w_i u'_i) + \beta(w_i u''_i)) &= 4q + 2i + 1 - \left(i + 2q - i + \frac{3q + 2i + 1}{2} \right) \\ &= \frac{q + 3}{2} = \delta_1, \end{aligned}$$

b. untuk titik $w_i, i = 2$,

$$\begin{aligned}\beta(w_i) - (\beta(w_{i-1} w_i) + \beta(w_i w_{i+1}) + \beta(w_i u'_i) + \beta(w_i u''_i)) \\ = 4q + 2i + 1 - \left((i - 1) + i + (2q - i) + \frac{3q + 2i + 1}{2} \right) \\ = \frac{q + 3}{2} = \delta_1, \end{aligned}$$

c. Untuk titik $w_i, i = 3$,

$$\beta(w_i) - (\beta(w_{i-1} w_i) + \beta(w_i u'_i) + \beta(w_i u''_i))$$

$$= 5q + i - \left((i - 1) + (2q - 1) + \frac{3q + 2i + 1}{2} \right) = \frac{q + 3}{2} = \delta_1,$$

d. Untuk titik $u'_i, 1 \leq i \leq q$,

$$\beta(u'_i) - \beta(w_i u'_i) = 4q - i - (2q - 1) = 2q = \delta_2,$$

e. Untuk titik $u''_i, 1 \leq i \leq q$,

$$\beta(u''_i) - \beta(w_i u''_i) = \frac{7q + 2i + 1}{2} - \left(\frac{3q + 2i + 1}{2} \right) = 2q = \delta_2.$$

Pada Kasus 1, untuk $q=3$, diperoleh $\delta_1 = \frac{q+3}{2}$, $\delta_2 = 2q$.

Kasus 2. Untuk q genap, $q \geq 4$.

Pada Kasus 2, dikonstruksi pemetaan bijektif $\beta: V(C_{q,2}) \cup E(C_{q,2}) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 6q - 1\}$ sehingga label titik adalah

$$\begin{aligned} \beta(w_i) &= \begin{cases} 5q + 2i - 2, & 1 \leq i \leq \frac{q}{2}, \\ 4q + 2i - 1, & \frac{q}{2} + 1 \leq i \leq q, \end{cases} \\ \beta(u''_i) &= 4q - 1, & 1 \leq i \leq q \\ \beta(u''_i) &= \begin{cases} \frac{9q + 2i - 2}{2}, & 1 \leq i \leq \frac{q}{2}, \\ \frac{3q + 2i}{2}, & \frac{q}{2} + 1 \leq i \leq q - 1, \\ 4q, & i = q, \end{cases} \end{aligned}$$

dan label sisi

$$\begin{aligned} \beta(w_i w_{i+1}) &= i, \quad 1 \leq i \leq q - 1, \\ \beta(w_i u'_i) &= 2q - i, \quad 1 \leq i \leq q, \\ \beta(w_i u''_i) &= \begin{cases} \frac{5q + 2i - 2}{2}, & 1 \leq i \leq \frac{q}{2}, \\ \frac{3q + 2i}{2}, & \frac{q}{2} + 1 \leq i \leq q - 1, \\ 2q, & i = q. \end{cases} \end{aligned}$$

Berdasarkan konstruksi fungsi bijektif β dapat diperhatikan bahwa sisi graf $C_{q,2}$ sebanyak $3q - 1$ memperoleh label himpunan bilangan $\{1, 2, 3, \dots, 3q - 1\}$ dan titik-titik graf $C_{q,2}$ sebanyak $3q$ memperoleh label himpunan bilangan $\{3q, 3q + 1, 3q + 2, 3q + 3, \dots, 6q - 1\}$. Pembuktian pelabelan titik *bimagic* terbalik super dilakukan dengan memeriksa setiap titik $w, u \in V(C_{q,2})$, dihitung nilai $\beta(w) - \sum \beta(wu)$.

a. Untuk titik w_i , $i = 1$,

$$\begin{aligned}\beta(w_i) - (\beta(w_i w_{i+1}) + \beta(w_i u'_i) + \beta(w_i u''_i)) &= 5q + 2i - 2 - \left(i + (2q - 1) + \frac{3q + 2i + 1}{2}\right) \\ &= \frac{q}{2} = \delta_1.\end{aligned}$$

b. Untuk titik w_i , $2 \leq i \leq \frac{q}{2}$,

$$\begin{aligned}\beta(w_i) - (\beta(w_{i-1} w_i) + \beta(w_i w_{i+1}) + \beta(w_i u'_i) + \beta(w_i u''_i)) \\ &= 5q + 2i - 2 - (i + (i - 1) + (2q - 1) + \frac{5q + 2i - 2}{2}) \\ &= \frac{q}{2} = \delta_1.\end{aligned}$$

c. Untuk titik w_i , $\frac{q}{2} + 1 \leq i \leq q - 1$,

$$\begin{aligned}\beta(w_i) - (\beta(w_{i-1} w_i) + \beta(w_i w_{i+1}) + \beta(w_i u'_i) + \beta(w_i u''_i)) \\ &= 4q + 2i - 1 - (i + (i - 1) + (2q - 1) + \frac{3q - 2i}{2}) \\ &= \frac{q}{2} = \delta_1.\end{aligned}$$

d. Untuk titik w_i , $i = q$,

$$\begin{aligned}\beta(w_i) - (\beta(w_{i-1} w_i) + \beta(w_i u'_i) + \beta(w_i u''_i)) &= 4q + 2i - 1 - (i - 1 + (2q - 1) + 2q) \\ &= 2q = \delta_2.\end{aligned}$$

e. Untuk titik u'_i , $1 \leq i \leq q$

$$\begin{aligned}\beta(u'_i) - \beta(w_i u'_i) &= 4q - i - (2q - i) \\ &= 2q = \delta_2.\end{aligned}$$

f. Untuk titik u''_i , $1 \leq i \leq q - 1$

$$\begin{aligned}\beta(u''_i) - \beta(w_i u''_i) &= \frac{9q + 2i - 2}{2} - \left(\frac{5q + 2i - 2}{2}\right) \\ &= 2q = \delta_2.\end{aligned}$$

g. Untuk titik u''_i , $i = q$

$$\begin{aligned}\beta(u''_i) - \beta(w_i u''_i) &= 4q - 2q \\ &= 2q = \delta_2.\end{aligned}$$

Pada Kasus 2, dengan q genap, diperoleh $\delta_1 = \frac{q}{2}$, $\delta_2 = 2q$.

Kasus 3. Untuk q ganjil, $q \geq 5$.

Pada Kasus 3, dikonstruksi pemetaan bijektif $\beta: V(C_{q,2}) \cup E(C_{q,2}) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 6q - 1\}$

sehingga label titik adalah

$$\beta(w_i) = \begin{cases} 5q + 2i + 1, & 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor - 1, \\ 4q + 2i + 1, & \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor \leq i \leq q - 1, \\ 5q + 1, & i = q, \end{cases}$$

$$\beta(u_i'') = 4q - 1, \quad 1 \leq i \leq q,$$

$$\beta(u_i'') = \begin{cases} \frac{9q + 2i + 1}{2}, & 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor - 1, \\ \frac{7q + 2i + 1}{2}, & \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor \leq i \leq q. \end{cases}$$

dan label sisi

$$\beta(w_i w_{i+1}) = i, \quad 1 \leq i \leq q - 1,$$

$$\beta(w_i u_i') = 2q - i, \quad 1 \leq i \leq q,$$

$$\beta(u_i'') = \begin{cases} \frac{5q + 2i + 1}{2}, & 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor - 1, \\ \frac{3q + 2i + 1}{2}, & \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor \leq i \leq q. \end{cases}$$

Selanjutnya dihitung nilai $\beta(w) - \sum \beta(wu)$ untuk setiap $w, u \in V(C_{q,2})$.

a. Untuk titik $w_i, i = 1$,

$$\begin{aligned} \beta(w_i) - (\beta(w_i w_{i+1}) + \beta(w_i u_i') + \beta(w_i u_i'')) &= 5q + 2i + 2 - \left(i + (2q - 1) + \frac{5q + 2i + 1}{2} \right) \\ &= \frac{q + 3}{2} = \delta_1. \end{aligned}$$

b. Untuk titik $w_i, 2 \leq i \leq \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor - 1$,

$$\begin{aligned} \beta(w_i) - (\beta(w_{i-1} w_i) + \beta(w_i w_{i+1}) + \beta(w_i u_i') + \beta(w_i u_i'')) &= 5q + 2i + -(i + (i - 1) + (2q - 1) + \frac{5q + 2i + 1}{2}) \\ &= \frac{q + 3}{2} = \delta_1. \end{aligned}$$

c. Untuk titik $w_i, \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor \leq i \leq q - 1$,

$$\begin{aligned} \beta(w_i) - (\beta(w_{i-1} w_i) + \beta(w_i w_{i+1}) + \beta(w_i u_i') + \beta(w_i u_i'')) &= 4q + 2i + 1 - (i + (i - 1) + (2q - 1) + \frac{3q + 2i + 1}{2}) \\ &= \frac{q + 3}{2} = \delta_1. \end{aligned}$$

d. Untuk titik $w_i, i = q$,

$$\begin{aligned} \beta(w_i) - (\beta(w_{i-1} w_i) + \beta(w_i u_i') + \beta(w_i u_i'')) &= 5q + 1 - (i - 1 + (2q - 1) + \frac{3q + 2i + 1}{2}) \\ &= \frac{q + 3}{2} = \delta_1. \end{aligned}$$

$$= \frac{q+3}{2} = \delta_1.$$

e. Untuk titik $u'_i, 1 \leq i \leq q$,

$$\beta(u'_i) - \beta(w_i u'_i) = 4q - i - (2q - i) = 2q = \delta_2.$$

f. Untuk titik $u''_i, 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor - 1$,

$$\begin{aligned} \beta(u''_i) - \beta(w_i u''_i) &= \frac{9q + 2i + 1}{2} - \left(\frac{5q + 2i + 1}{2} \right) \\ &= 2q = \delta_2. \end{aligned}$$

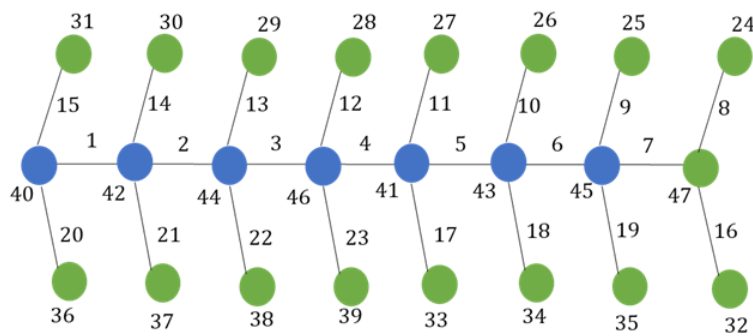
g. Untuk titik $u''_i, \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor \leq i \leq q$

$$\begin{aligned} \beta(u''_i) - \beta(w_i u''_i) &= \frac{7q + 2i + 1}{2} - \left(\frac{3q + 2i + 1}{2} \right) \\ &= 2q = \delta_2. \end{aligned}$$

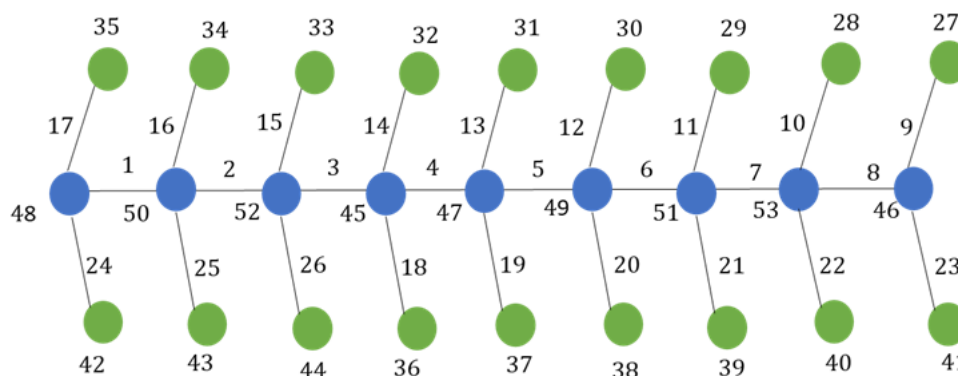
Untuk Kasus 3, diperoleh $\delta_1 = \frac{q+3}{2}$, $\delta_2 = 2q$.

Berdasarkan Kasus 1, Kasus 2, dan Kasus 3, diperoleh $\{\beta(w) - \sum_{u \in N(w)} \beta(wu) | \forall w, u \in V(C_{q,2})\} = \{\delta_1, \delta_2\}$ untuk suatu δ_1, δ_2 yang berbeda, karena itu graf $C_{q,2}$ memuat pelabelan titik *bimagic* terbalik. Selanjutnya graf $C_{q,2}$ yang mempunyai $3q - 1$ sisi diberi label dengan himpunan bilangan $\{1, 2, 3, \dots, 3q - 1\}$, dan $3q$ titik diberi label dengan himpunan bilangan $\{3q, 3q + 1, 3q + 2, 3q + 3, \dots, 6q - 1\}$, sehingga graf $C_{q,2}$ memuat pelabelan titik *bimagic* terbalik super dan graf $C_{q,2}$ disebut graf titik *bimagic* terbalik super.

Pelabelan titik *bimagic* terbalik super graf *centipede tree* $C_{8,2}$ disajikan pada Gambar 8 dan $C_{9,2}$ pada Gambar 9.



Gambar 8. Pelabelan Titik *Bimagic* Terbalik Super Graf *Centipede Tree* $C_{8,2}$ dengan $\delta_1 = 4$ dan $\delta_2 = 16$



Gambar 9. Pelabelan Titik *Bimagic* Terbalik Super Graf *Centipede Tree* $C_{9,2}$ dengan $\delta_1 = 6$ dan $\delta_2 = 18$

4 Simpulan

Penelitian ini memperkenalkan dan mengkaji konsep pelabelan titik *bimagic* terbalik super sebagai pengembangan dari pelabelan titik *magic* terbalik super. Konsep ini memberikan alternatif baru dalam konstruksi pelabelan graf yang memungkinkan diperolehnya dua konstanta yang berbeda dalam suatu struktur graf. Hasil utama penelitian menunjukkan bahwa graf *path* P_q adalah graf titik *bimagic* terbalik super dengan konstanta *bimagic* $\delta_1 = 1$ dan $\delta_2 = q$ untuk q genap dan $\delta_1 = 1$ dan $\delta_2 = q + 1$ untuk q ganjil. Graf *brush* B_q adalah graf titik *bimagic* terbalik super dengan konstanta *bimagic* $\delta_1 = q$ dan $\delta_2 = q + 1$, graf *centipede tree* $C_{q,2}$ adalah graf titik *bimagic* terbalik super dengan konstanta *bimagic* untuk q genap adalah $\delta_1 = \frac{q}{2}, \delta_2 = 2q$, dan q ganjil adalah $\delta_1 = \frac{q+3}{2}, \delta_2 = 2q$. Lebih lanjut penelitian ini dapat dikembangkan untuk graf *brush* dengan titik daun lebih dari 1 atau untuk keluarga graf yang memuat *cycle*.

5 Daftar Pustaka

- [1] W. D Wallis., *Magic Graph*, Birkhäuser, Boston 2001
- [2] J. Sedláček., *Theory of Graphs and Its Applications*, House Czechoslovak Acad.Sci, Prague, pp: 163-164, 1964
- [3] J.A. Gallian, “A Dynamic Survey of Graph Labeling”. Minnesota: *The Journal of Combinatorics*, 2024.
- [4] J.B. Babujee and S. Babitha, “On 1-Vertex Bimagic Vertex Labeling”, *TAMKANG Journal of Mathematics*, vol. 45, no. 3, pp. 259-273, (September) 2014. <https://doi.org/10.5556/j.tkjm.45.2014.1004>

-
- [5] N. Murugesan and R.S. Amutha, “Vertex Bimagic Total Labeling for Bistar $B_{n,n}$ ”, *International Journal of Scientific and Innovation Mathematical Research*, vol. 2, issue. 9, pp. 764-769, (September) 2014.
 - [6] N. Murugesan and R.S. Amutha, “Vertex Bimagic Total Labeling for Graphs”, *International Journal of Mathematics Trends and Technology*, vol. 36, no. 4, pp. 225-232, (August) 2016.
 - [7] S.V. Ramana and S.S. Basha, “Reverse Super Vertex-Magic Labeling of a Graph”, *Ph.D. Thesis*. India 2006.
 - [8] U.M. Raju and S.S. Basha, “On Reverse Vertex-Magic Labelings of Graphs”, *Journal of Emerging Technologies and Innovative Research*, vol. 5, issue. 12, pp. 57-61, (Desember) 2018.
 - [9] U.M. Raju and S.S. Basha, “On Reverse Super Vertex-Magic Labeling”, *Journal on Recent and Innovation Trends in Computing and Communication*, vol. 6, issue.9, pp. 30-33, (September) 2018. <https://doi.org/10.17762/ijritcc.v6i9.5185>
 - [10] P. Sugapriya and K.Amuthavalli, “Reverse Super Vertex Trimagic Labeling of Disconnected Graphs”, *Compliance Engineering Journal*, vol. 10, issue. 9, pp. 404-416, 2019.
 - [11] F. Harary, *Graph theory*. Boca Raton, 2018.
 - [12] A.E. Samuel, and S. Kalaivani, “Prime Labeling of Brush Graphs”, *International Journal of Mathematics Trends and Technology*, vol. 55, no.4, pp. 259-262, (March) 2018. <https://doi.org/10.14445/22315373/IJMTT-V55P533>
 - [13] S.L., Klee and A. Park., “Prime Labeling of Families of Trees with Gaussian Integers”, *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, vol. 13, pp. 165-176, 2016. <https://doi.org/10.1016/j.akcej.2016.04.001>