

Analisis Interaksi Populasi Hare dan Lynx Menggunakan Model Lotka-Volterra dengan Menerapkan Pertumbuhan Logistik dan Respons Fungsional Holling Tipe I dan II

Nabila Agatha Parsa¹ dan Abadi^{1*}

¹ Program Studi S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Negeri Surabaya, Surabaya, Indonesia.
e-mail:nabila.23017@mhs.unesa.ac.id, abadi@unesa.ac.id*

Diajukan: 10 Maret 2026, Diperbaiki: 21 Juli 2026, Diterima: 23 Juli 2026

Abstrak

Studi ini membahas pemodelan interaksi populasi hare dan lynx menggunakan model Lotka–Volterra yang dikembangkan berdasarkan data riil populasi kedua spesies dengan tahun 1861–1880 (sumber: Hudson Bay Company/GitHub). Studi ini menggunakan dua model: Model I yang menerapkan pertumbuhan logistik pada populasi mangsa (hare) dengan respons fungsional Holling tipe I, dan Model II yang menerapkan pertumbuhan logistik pada populasi mangsa (hare) dengan respons fungsional Holling tipe II. Penggunaan dua model dalam studi ini yang bertujuan untuk mengetahui model mana yang merepresentasikan interaksi mangsa-pemangsa yang lebih realistis. Kedua model dianalisis eksistensi dan kestabilan solusinya. Selanjutnya, parameter-parameter model yaitu a , laju pertumbuhan intrinsik populasi mangsa, b , laju penurunan populasi mangsa akibat interaksi dengan pemangsa, c , laju kematian alami populasi pemangsa, d , efisiensi konversi energi hasil predasi, serta K , daya dukung lingkungan, diestimasi menggunakan dua metode, yaitu *Least Square Estimation* (LSE) dan *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). Keakuratan kedua metode diperoleh dengan membandingkan nilai MSE total kedua metode. Hasil estimasi parameter kedua model dengan nilai MSE total terkecil digunakan untuk menentukan solusi numerik kedua model berupa time series dinamika populasi hare dan lynx. Perbandingan data riil dengan solusi numerik dua model yang menerapkan respons fungsional yang berbeda menunjukkan bahwa kedua model relatif dapat merepresentasikan dinamika populasi lynx dan hare. Akan tetapi, hasil perbandingan tersebut tidak dapat menyimpulkan model mana yang lebih realistis dalam merepresentasikan dinamika kedua populasi secara simultan.

Kata Kunci: Lotka–Volterra, Respons Fungsional Holling, Estimasi Parameter

Abstract

*This study discusses the modeling of hare and lynx population interactions using the Lotka–Volterra model, developed from real population data for both species from 1861–1880 (source: Hudson Bay Company/GitHub). This study uses two models: Model I, which applies logistic growth to the prey population (hare) with a Holling type I functional response, and Model II, which applies logistic growth to the prey population (hare) with a Holling type II functional response. The use of two models in this study aims to determine which model better represents the interaction between prey and predator. Both models are analyzed for their existence and stability of solutions. Furthermore, the model parameters, namely a , the intrinsic growth rate of the prey population, b , the rate of decline of the prey population due to interactions with predators, c , the natural mortality rate of the predator population, d , the energy conversion efficiency from predation, and K , the environmental carrying capacity, are estimated using two methods, namely *Least Square Estimation* (LSE) and *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). The accuracy of both methods is assessed by comparing their total MSE values. The estimated parameter values*

of both models with the smallest total MSE are used to determine numerical solutions for both models, which yield time series of hare and lynx populations. Comparison of the real data with numerical solutions from two models with different functional responses indicates that both models are relatively capable of representing the population dynamics of lynx and hares. However, the comparison results cannot conclude which model more realistically represents the dynamics of both populations simultaneously.

Keywords: Lotka–Volterra, Holling Functional Response, Parameter Estimation

1 Pendahuluan

Pemodelan matematika adalah proses menerjemahkan permasalahan nyata ke dalam bentuk persamaan matematika untuk memahami dan mencari solusi suatu fenomena [1], [2]. Pemodelan banyak diterapkan di berbagai bidang, termasuk biologi. Dalam ekologi, pemodelan digunakan untuk mempelajari kelimpahan dan distribusi organisme di lingkungannya [3]. Salah satu interaksi penting yang sering dikaji adalah hubungan predator–prey, karena berperan besar dalam memahami dinamika populasi serta mendukung pengelolaan sumber daya hayati dan kebijakan lingkungan [4], [5].

Interaksi predator–prey lynx–hare merupakan contoh klasik dalam ekologi yang banyak dikaji di wilayah Kanada dan Alaska, di mana lynx bergantung pada hare sebagai sumber makanan utama [6]. Fluktuasi populasi hare secara langsung memengaruhi dinamika lynx dengan respons predator yang cenderung tertunda, sehingga membentuk pola osilasi populasi [7]. Penelitian ini menggunakan data empiris Hudson Bay Company yang diperoleh dari repositori GitHub, yang menunjukkan fluktuasi osilatif dengan periode sekitar 8–11 tahun.

Pola dinamika tersebut mengindikasikan perlunya suatu model matematika yang mampu merepresentasikan mekanisme interaksi predator–prey secara akurat. Oleh karena itu, dalam penelitian ini digunakan model predator–prey Lotka–Volterra dengan dua bentuk respons fungsional, yaitu Holling Tipe I dan Holling Tipe II. Selanjutnya, dilakukan estimasi parameter model menggunakan dua metode, yaitu *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) dan *Least Square Estimation* (LSE), karena parameter model tidak dapat diamati secara langsung dari data.

Dengan demikian, penelitian ini bertujuan untuk membandingkan akurasi dua model dinamika populasi hare–lynx yang menggunakan respons fungsional Holling Tipe I dan Holling Tipe II, serta membandingkan kinerja metode estimasi parameter MLE dan LSE. Perbandingan dilakukan berdasarkan tingkat kesesuaian model terhadap data riil, sehingga diperoleh model dan metode estimasi parameter yang paling mampu merepresentasikan dinamika populasi predator–prey pada model hare–lynx.

2 Metode Penelitian

Beberapa metode matematis dan statistika digunakan dalam studi ini.

2.1. Sistem Persamaan Diferensial, Titik Keseimbangan dan Analisis Kestabilannya

Model matematika yang dikonstruksi dalam penelitian ini berupa sistem persamaan diferensial biasa (*ordinary differential equations*), secara umum dinyatakan sebagai berikut.

$$\frac{dx}{dt} = f(x), x \in \mathbb{R}^n, f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (1)$$

dengan $x(t)$ adalah vektor yang menyatakan nilai setiap variabel dalam model pada waktu t dan f adalah fungsi menggambarkan bagaimana setiap variabel berubah akibat interaksi dengan variabel lainnya.

Titik keseimbangan (*equilibrium point*) didefinisikan sebagai solusi konstan dari sistem yang memenuhi $f(x^*) = 0$, yaitu kondisi saat seluruh laju perubahan variabel bernilai nol.

Untuk menganalisis perilaku solusi di sekitar titik keseimbangan x^* , sistem nonlinear diaproksimasi secara lokal menggunakan linearisasi Taylor orde pertama. Misalkan $x(t) = x^* + \varepsilon(t)$, dengan $\varepsilon(t)$ menyatakan penyimpangan kecil dari titik keseimbangan x^* . Dengan mensubstitusikan bentuk tersebut ke dalam sistem dan mengabaikan suku-suku orde tinggi $\mathcal{O}(\|\varepsilon\|)^2$, diperoleh sistem terlinearisasi:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = J(x^*)\varepsilon \quad (2)$$

Dengan $J(x^*)$ merupakan matriks Jacobian dengan elemen-elemennya didefinisikan sebagai:

$$J_{ij}(x^*) = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{x=x^*}, i, j = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

Analisis kestabilan lokal x^* ditentukan oleh nilai eigen λ_i dari $J(x^*)$, yang diperoleh dari $\det(J(x^*) - \lambda I) = 0$. Kriteria yang memenuhi sebagai berikut:

- 1) Titik keseimbangan x^* bersifat stabil asimtotik secara lokal (*locally asymptotically stable*) apabila seluruh nilai eigen memiliki bagian real negatif, yakni $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ untuk semua $i = 1, 2, \dots, n$.
- 2) Titik keseimbangan x^* bersifat tidak stabil apabila terdapat paling sedikit satu nilai eigen dengan bagian real positif, yakni $\text{Re}(\lambda_i) > 0$ untuk suatu indeks i .
- 3) Titik keseimbangan x^* bersifat stabil (tetapi tidak asimtotik) apabila seluruh nilai eigen memiliki bagian real nonpositif dan paling sedikit satu nilai eigen murni imajiner, yakni $\text{Re}(\lambda_i) \leq 0$ dengan $\text{Re}(\lambda_j) = 0$ untuk suatu j .

(lihat [8] untuk referensi).

2.2. Maximum Likelihood Estimation (MLE)

Metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) merupakan metode inferensi statistika dengan menentukan nilai parameter yang memaksimumkan fungsi *likelihood*, yakni fungsi yang menentukan probabilitas berdasarkan data yang digunakan dalam pengamatan [9]. Secara teoritis, misalkan $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ merupakan sampel acak berukuran n yang saling bebas dan berdistribusi identik dari fungsi densitas atau fungsi massa peluang $f(x_i | \theta)$, dengan θ merupakan parameter populasi, di mana nilai parameter tersebut tidak diketahui secara pasti sehingga perlu diestimasi berdasarkan data sampel [10]. Berdasarkan asumsi tersebut, fungsi *likelihood* didefinisikan sebagai berikut.

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i | \theta) \quad (4)$$

dengan merepresentasikan peluang relatif dari parameter θ terhadap data yang diamati.

Fungsi *likelihood* umumnya dinyatakan dalam bentuk *log-likelihood* dengan tujuan mempermudah analisis matematis, yaitu

$$\ell(\theta) = \log L(\theta) = \sum_{i=1}^n \log f(x_i | \theta) \quad (5)$$

Transformasi tersebut tidak mengubah titik maksimum, namun berfokus pada penyederhanaan proses komputasi. Estimator maksimum *likelihood* diperoleh melalui proses optimasi

$$\hat{\theta}_{MLE} = \max_{\theta} \ell(\theta) \quad (6)$$

dengan syarat kondisi orde pertama

$$\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \theta} = 0. \quad (7)$$

Selanjutnya, verifikasi keberadaan titik maksimum lokal dilakukan dengan menggunakan turunan kedua untuk memastikan bahwa estimasi yang diperoleh merupakan titik maksimum. Dalam kondisi regularitas tertentu, estimator MLE bersifat konsisten (konvergen ke nilai parameter sejati seiring $n \rightarrow \infty$), normal asimtotik (distribusinya mendekati distribusi normal untuk n besar), dan efisien secara asimtotik (variansnya mencapai batas bawah (*Cramer-Rao*), sehingga MLE banyak digunakan dalam inferensi statistika modern [11].

2.3. Least Squares Method (LSE)

Metode *Least Squares Estimation* (LSE) merupakan metode estimasi parameter dengan tujuan meminimalkan jumlah kuadrat dari selisih antara nilai observasi dan nilai prediksi model. Pada model regresi linear, metode ini memberikan solusi analitik melalui persamaan normal dan banyak digunakan karena kesederhanaan komputasinya [12]. Dalam regresi linear sederhana, hubungan antara variabel respons y_i dan variabel prediktor x_i dinyatakan sebagai:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

dengan ε_i menyatakan komponen galat acak yang diasumsikan bernilai harapan nol. Estimasi parameter pada *Least Squares Estimation* diperoleh dengan meminimalkan fungsi jumlah kuadrat galat (*Sum of Squared Errors/SSE*) yaitu:

$$S(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2 \quad (9)$$

Nilai estimator *Least Squares Estimation* diperoleh dengan menyelesaikan kondisi minimisasi melalui turunan parsial terhadap parameter

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_0} = 0, \frac{\partial S}{\partial \beta_1} = 0. \quad (10)$$

Solusi dari sistem persamaan normal tersebut menghasilkan estimator:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (11)$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \quad (12)$$

Berdasarkan Teorema Gauss-Markov, estimator *Least Squares* merupakan *Best Linear Unbiased Estimator* (BLUE) dengan varians minimum di antara seluruh estimator linier tak bias, dengan asumsi bahwa nilai harapan galat nol, varians konstan, serta tidak terdapat korelasi antar galat [13].

Namun demikian, model yang digunakan dalam penelitian ini berupa sistem persamaan diferensial nonlinear (model Lotka-Volterra dengan pertumbuhan logistik dan respons fungsional Holling Tipe I dan Holling Tipe II). Hubungan antara parameter model dan nilai prediksi populasi bersifat nonlinear, sehingga *Best Linear Unbiased Estimator* (BLUE) berdasarkan Teorema Gauss-Markov tidak berlaku secara langsung pada penelitian ini. Estimasi parameter dilakukan dengan meminimalkan fungsi jumlah kuadrat galat (SSE) antara data populasi hasil pengamatan dan solusi numerik model, yaitu

$$SSE(\theta) = \sum_{l=1}^n [(x_l^{obs} - x_l^{pred}(\theta))^2 + (y_l^{obs} - y_l^{pred}(\theta))^2] \quad (13)$$

dengan $\theta = (a, b, c, d)$ untuk model Holling Tipe I dan $\theta = (a, b, c, d, e)$ untuk model Holling Tipe II, $x_i^{pred}(\theta), y_i^{pred}(\theta)$ diperoleh berdasarkan solusi numerik sistem persamaan diferensial untuk nilai parameter θ tertentu.

3 Hasil dan Pembahasan

3.1 Asumsi dan Konstruksi Model

3.1.1 Model Lotka-Volterra dengan Pertumbuhan Logistik pada Populasi Prey dan Respons Fungsional Holling Tipe I (Model I)

Dalam ekologi matematika, model Lotka–Volterra digunakan untuk menggambarkan interaksi predator–prey, namun asumsi pertumbuhan mangsa secara eksponensial kurang realistis untuk rentang waktu yang panjang. Oleh karena itu, model dimodifikasi dengan menerapkan pertumbuhan logistik pada populasi mangsa yang mempertimbangkan daya dukung lingkungan, yaitu batas maksimum populasi yang dapat didukung oleh lingkungan [14]. Dengan asumsi tersebut, diperoleh model Lotka–Volterra dengan pertumbuhan logistik sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax \left(1 - \frac{x}{K}\right) - bxy \\ \frac{dy}{dt} &= -cy + dxy.\end{aligned}\tag{14}$$

Pada Model I, fungsi $x(t)$ dan $y(t)$ masing-masing merepresentasikan kepadatan populasi mangsa dan pemangsa pada waktu t . Parameter a menyatakan laju pertumbuhan intrinsik populasi mangsa, b merupakan laju penurunan populasi mangsa akibat interaksi dengan pemangsa, c menyatakan laju kematian alami populasi pemangsa, d merupakan efisiensi konversi energi hasil predasi, serta K menyatakan daya dukung lingkungan. Seluruh parameter pada model diasumsikan bernilai positif.

3.1.2 Model Lotka-Volterra dengan Pertumbuhan Logistik pada Populasi Prey dan Respons Fungsional Holling Tipe II (Model II)

Dengan mempertimbangkan waktu penanganan mangsa (*handling time*) pada proses predasi hare oleh lynx, mekanisme pemangsaan dimodelkan menggunakan respons fungsional Holling Tipe II. Penyesuaian ini bertujuan untuk merepresentasikan proses berburu yang memerlukan waktu relatif lama [15], sehingga model predator–prey dinyatakan dalam bentuk model persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{bxy}{1 + ex} \\ \frac{dy}{dt} &= -cy + \frac{dxy}{1 + ex}.\end{aligned}\tag{15}$$

Pada Model II, definisi parameter a , b , c , d , dan K sama seperti pada Model I. Parameter tambahan e merepresentasikan tingkat kejenuhan predator yang berkaitan dengan *handling time* dalam proses pemangsaan. Seluruh parameter pada Model II diasumsikan bernilai positif.

3.2 Titik Keseimbangan

Titik keseimbangan model diperoleh dengan mensyaratkan $\frac{dx}{dt} = 0$ dan $\frac{dy}{dt} = 0$.

3.2.1 Titik Keseimbangan Model I

Berdasarkan Model I, diperoleh tiga titik keseimbangan model yaitu:

1) Titik Keseimbangan Trivial

Diperoleh $E_1(0, 0)$, merepresentasikan kepunahan kedua populasi yaitu populasi mangsa dan pemangsa.

2) Titik Keseimbangan dengan Kepunahan Pemangsa

Diperoleh $E_2(K, 0)$, merepresentasikan kepunahan populasi pemangsa, sementara populasi mangsa berada pada daya dukung lingkungan.

3) Titik Keseimbangan Interior

Diperoleh $E_3(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}(1 - \frac{c}{dK}))$, dengan syarat $(1 - \frac{c}{dK}) > 0$, merepresentasikan kondisi koeksistensi antara populasi mangsa dan pemangsa.

3.2.2 Titik Keseimbangan Model II

Berdasarkan Model II, diperoleh tiga titik keseimbangan model yaitu:

1) Titik Keseimbangan Trivial

Diperoleh $E_4(0, 0)$, merepresentasikan kepunahan kedua populasi yaitu populasi mangsa dan pemangsa.

2) Titik Keseimbangan dengan Kepunahan Pemangsa

Diperoleh $E_5(K, 0)$, merepresentasikan kepunahan populasi pemangsa, sementara populasi mangsa berada pada daya dukung lingkungan.

3) Titik Keseimbangan Interior

Diperoleh $E_6(x^*, y^*)$, dengan $x^* = \frac{c}{d-ce}$, syarat $d - ce > 0$ dan

$y^* = \frac{a(1 - \frac{c}{K(d-ce)})(1 + \frac{ce}{(d-ce)})}{b}$, dengan syarat $(1 - \frac{c}{K(d-ce)}) > 0$, yang merepresentasikan kondisi koeksistensi antara populasi mangsa dan pemangsa.

3.3 Analisis Kestabilan

3.3.1 Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan Model I

Berdasarkan hasil linearisasi Model I diperoleh matriks Jacobian sebagai berikut.

$$J_{(x,y)} = \begin{pmatrix} a - 2\left(\frac{ax}{K}\right) - by & -bx \\ dy & -c + dx \end{pmatrix} \quad (16)$$

Analisis kestabilan titik kesetimbangan ditinjau berdasarkan kriteria kestabilan lokal untuk sistem linier, yaitu titik kesetimbangan bersifat stabil asimtotik lokal, jika semua nilai eigen matriks Jacobian bernilai real negatif dan bersifat tidak stabil, jika terdapat minimal satu nilai eigen bernilai real positif [8].

1) Kestabilan Titik Kesetimbangan $E_1(0,0)$

Dengan melakukan linearisasi Model I di sekitar titik kesetimbangan $E_1(0,0)$, diperoleh matriks Jacobian sebagai berikut.

$$J_{E_1} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} \quad (17)$$

Kestabilan E_1 dijamin oleh Teorema 1 berikut.

Teorema 1 *Titik kesetimbangan $E_1(0,0)$ tidak stabil.*

Bukti. Matriks Jacobian (17) diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut

$$\lambda^2 + (-a + c)\lambda - ac = 0,$$

yang akar-akar karakteristik atau nilai eigen dari matriks Jacobian J_{E_1} adalah

$$\lambda_1 = a, \quad \lambda_2 = -c. \quad (18)$$

Karena nilai parameter $a, c > 0$, maka nilai eigen real dan berbeda tanda. Jadi E_1 merupakan titik sadel/pelana tidak stabil. ■

2) Kestabilan Titik Kesetimbangan $E_2(K, 0)$

Dengan melakukan linearisasi Model I di sekitar titik kesetimbangan $E_2(K, 0)$, diperoleh matriks Jacobian sebagai berikut.

$$J_{E_2} = \begin{pmatrix} -a & -bK \\ 0 & -c + dK \end{pmatrix} \quad (19)$$

Kestabilan E_2 dijamin oleh Teorema 2 berikut.

Teorema 2 *Titik kesetimbangan $E_2(K, 0)$:*

- i) *merupakan titik node/simpul yang stabil asimtotik lokal, jika $K < \frac{c}{d}$.*
- ii) *merupakan titik sadel/pelana tidak stabil, jika $K > \frac{c}{d}$.*

Bukti. Matriks Jacobian (19) diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut.

$$\lambda^2 + (a + c - dK)\lambda + a(c - dK) = 0$$

yang akar-akar karakteristik atau nilai eigen dari matriks Jacobian J_{E_2} adalah

$$\lambda_1 = -a, \quad \lambda_2 = -c + dK. \quad (20)$$

Karena $a > 0$, maka λ_1 selalu bernilai negatif. Selanjutnya, jika $-c + dK < 0$, ekuivalen dengan $K < \frac{c}{d}$, maka $\lambda_2 < 0$. Jadi, kedua nilai eigen bernilai real negatif, sehingga titik kesetimbangan E_2 merupakan titik node/simpul yang stabil asimtotik lokal. Sebaliknya, jika $-c + dK > 0$, ekuivalen dengan $K > \frac{c}{d}$, maka $\lambda_2 > 0$. Jadi, satu nilai eigen bernilai negatif dan satu nilai eigen bernilai positif, sehingga titik kesetimbangan E_2 merupakan titik sadel/pelana tidak stabil. ■

3) Kestabilan Titik Kesetimbangan $E_3 (\frac{c}{d}, \frac{a}{b}(1 - \frac{c}{dK}))$

Dengan melakukan linearisasi Model I di sekitar titik kesetimbangan E_3 , diperoleh matriks Jacobian sebagai berikut.

$$J_{E_3} = \begin{pmatrix} -\frac{ac}{dK} & -\frac{bc}{d} \\ \frac{ad}{b}(1 - \frac{c}{dK}) & 0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

Kestabilan E_3 dijamin oleh Teorema 3 berikut.

Teorema 3 Titik kesetimbangan $E_3 (\frac{c}{d}, \frac{a}{b}(1 - \frac{c}{dK}))$:

- i) merupakan titik node/simpul yang stabil asimtotik lokal, jika $-c + dK > 0$ dan $(\frac{ac}{dK})^2 > 4ac(1 - \frac{c}{dK})$.
- ii) merupakan titik spiral yang stabil asimtotik lokal, jika $-c + dK > 0$ dan $(\frac{ac}{dK})^2 < 4ac(1 - \frac{c}{dK})$.
- iii) merupakan titik sadel/pelana tidak stabil, jika $-c + dK < 0$.

Bukti. Berdasarkan matriks Jacobian (21), diperoleh persamaan karakteristik dari J_{E_3} sebagai berikut.

$$\lambda^2 + \left(\frac{ac}{dK}\right)\lambda + ac\left(1 - \frac{c}{dK}\right) = 0$$

Sehingga diperoleh nilai eigen sebagai berikut.

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\frac{ac}{dK} \pm \sqrt{(\frac{ac}{dK})^2 - 4ac(1 - \frac{c}{dK})}}{2} \quad (22)$$

Semua parameter bernilai positif, sehingga berlaku:

- i) jika $-c + dK > 0$ dan $(\frac{ac}{dK})^2 > 4ac(1 - \frac{c}{dK})$, maka kedua nilai eigen bernilai real dan negatif. Dengan demikian, E_3 merupakan titik node/simpul yang stabil asimtotik lokal.
- ii) jika $-c + dK > 0$ dan $(\frac{ac}{dK})^2 < 4ac(1 - \frac{c}{dK})$, maka kedua nilai eigen bernilai kompleks sekawan dengan bagian real bernilai negatif, Jadi, E_3 merupakan titik spiral yang stabil asimtotik lokal.

- iii) jika $-c + dK < 0$, maka kedua nilai eigen bernilai real, satu bernilai positif dan satu bernilai negatif. Jadi, E_3 merupakan titik sadel/pelana tidak stabil. ■

3.3.2 Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan Model II

Hasil linearisasi dari Model II, diperoleh matriks Jacobian sebagai berikut.

$$J_{(x,y)} = \begin{pmatrix} a - 2\left(\frac{ax}{K}\right) - \frac{by}{(1+ex)^2} & -\frac{bx}{(1+ex)} \\ \frac{dy}{(1+ex)^2} & -c + \frac{dx}{(1+ex)} \end{pmatrix} \quad (23)$$

1) Kestabilan Titik Keseimbangan $E_4(0,0)$

Dengan melakukan linearisasi Model II di sekitar titik keseimbangan $E_4(0,0)$, diperoleh matriks Jacobian sebagai berikut.

$$J_{E_4} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Kestabilan E_4 dijamin oleh Teorema 4 berikut.

Teorema 4 *Titik keseimbangan $E_4(0,0)$ tidak stabil.*

Bukti. Karena $J_{E_4} = J_{E_1}$, langkah pembuktian Teorema 4 sama dengan bukti Teorema 1. ■

2) Kestabilan Titik Keseimbangan $E_5(K, 0)$

Dengan menerapkan proses linearisasi pada Model II di sekitar titik keseimbangan $E_5(K, 0)$, diperoleh matriks Jacobian sebagai berikut.

$$J_{E_5} = \begin{pmatrix} -a & -\frac{bK}{(1+eK)} \\ 0 & -c + \frac{dK}{(1+eK)} \end{pmatrix} \quad (25)$$

Kestabilan E_5 dijamin oleh Teorema 5 berikut.

Teorema 5 *Titik keseimbangan $E_5(K, 0)$:*

i) *merupakan titik node/simpul yang stabil asimtotik lokal, jika $-c + \frac{dK}{(1+eK)} < 0$.*

ii) *merupakan titik sadel/pelana tidak stabil, jika $-c + \frac{dK}{(1+eK)} > 0$.*

Bukti. Matriks Jacobian (25), diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut.

$$\lambda^2 + \left(a + c - \frac{dK}{(1+eK)}\right)\lambda + a\left(c - \frac{dK}{(1+eK)}\right) = 0$$

Dari persamaan karakteristik tersebut, diperoleh nilai eigen dari matriks Jacobian J_{E_2} adalah

$$\lambda_1 = -a, \quad \lambda_2 = -c + \frac{dK}{(1+eK)} \quad (26)$$

Karena $a > 0$, maka λ_1 selalu bernilai negatif. Selanjutnya, jika $-c + \frac{dK}{(1+eK)} < 0$, ekuivalen dengan $K < \frac{c}{d-ce}$, maka $\lambda_2 < 0$. Jadi, kedua nilai eigen bernilai real negatif, sehingga titik kesetimbangan E_5 merupakan titik node/simpul yang stabil asimtotik lokal. Sebaliknya, jika $-c + \frac{dK}{(1+eK)} > 0$, ekuivalen dengan $K > \frac{c}{d-ce}$, maka $\lambda_2 > 0$. Jadi, satu nilai eigen bernilai negatif dan satu nilai eigen bernilai positif, sehingga E_5 merupakan titik sadel/pelana tidak stabil.

■

3) Kestabilan Titik Kesetimbangan $E_6(x^*, y^*)$

Dengan mensubstitusikan nilai $x^* = \frac{c}{d-ce}$ dan $y^* = \frac{a(1 - \frac{c}{K(d-ce)})(1 + \frac{ce}{(d-ce)})}{b}$, pada matriks Jacobian (20), sehingga diperoleh:

$$J_{E_6} = \begin{pmatrix} \frac{ac[(d+ce)-Ke(d-ce)]}{dK(d-ce)} - \frac{bc}{d} & \\ \frac{adK-eacK-ac}{bK} & 0 \end{pmatrix} \quad (27)$$

Kestabilan E_6 dijamin oleh Teorema 6 berikut.

Teorema 6 Titik setimbang E_6 stabil jika $\frac{c}{(d-ce)} < K < \frac{d+ce}{e(d-ce)}$.

Bukti. Berdasarkan matriks Jacobian (10), diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$\lambda^2 + \left(\frac{ac[(d+ce)-Ke(d-ce)]}{dK(d-ce)} \right) \lambda + \frac{c}{dK} (adK - eacK - ac) = 0 \quad (28)$$

Kestabilan ditentukan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz [8], menyatakan bahwa semua akar persamaan karakteristik mempunyai bagian real negative jika dan hanya jika semua koefisien pada tabel Routh bernilai positif. Untuk persamaan orde dua, diperoleh syarat a_1 dan a_2 bernilai negatif. Sehingga berdasarkan persamaan karakteristik (27), dengan metode Routh-Hurwitz diperoleh tabel sebagai berikut.

Tabel 1. Tabel Routh-Hurwitz Persamaan Karakteristik (28)

s^2	a_0	a_2
s^1	a_1	$a_3 = 0$
s^0	$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} = a_2$	b_2

di mana:

$$a_0 = 1,$$

$$a_1 = \left(\frac{ac[(d+ce)-Ke(d-ce)]}{dK(d-ce)} \right),$$

$$a_2 = \frac{c}{dK} (adK - eacK - ac) = \frac{ac}{dK} [K(d - ce) - c],$$

Berdasarkan syarat eksistensi titik kesetimbangan E_6 , $x^* = \frac{c}{d-ce} > 0$ mengakibatkan $d - ce > 0$. Karena semua parameter bernilai positif, $ac > 0$ dan $Ke(d - ce) > 0$. Sehingga $a_1 > 0$ apabila $(d + ce) - Ke(d - ce) > 0$ atau $K < \frac{d+ce}{e(d-ce)}$. Di lain pihak, $a_2 > 0$ apabila $K(d - ce) - c > 0$, atau $K > \frac{c}{d-ce}$. Dari hasil analisis terhadap tanda a_1 dan a_2 tersebut diperoleh bahwa $\frac{c}{d-ce} < K < \frac{d+ce}{e(d-ce)}$ dan berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz titik setimbang E_6 stabil. ■

3.4 Estimasi Nilai Parameter

Estimasi parameter diawali dengan penentuan nilai daya dukung lingkungan K yang diuji, yaitu 50.000 hingga 500.000 dengan kenaikan 50.000. Untuk setiap nilai K , parameter model diestimasi menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) dan *Least Square Estimation* (LSE). Kinerja kedua metode serta dua model yang digunakan kemudian dibandingkan berdasarkan nilai *Mean Square Error* (MSE), yang didefinisikan sebagai rata-rata kuadrat selisih antara data observasi dan hasil prediksi model, yaitu $MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$. Nilai *MSE* yang lebih kecil menunjukkan tingkat kesesuaian model yang lebih baik terhadap data populasi yang diamati.

3.4.1 Estimasi Nilai Parameter Model I

Berikut merupakan nilai *Mean Square Error* (MSE) yang diperoleh Model I dari estimasi parameter menggunakan metode *Least Square Estimation* (LSE) untuk berbagai nilai daya dukung lingkungan K .

Tabel 2. Nilai *Mean Square Error* (MSE) Model I dengan Metode LSE

Nilai K	MSE Hare	MSE Lynx	MSE Total
50.000	2.411.465.443,2367	162.895.598,1582	2.574.361.041,3949
100.000	1.801.942.258,7512	115.071.693,6512	1.917.013.952,4024
150.000	1.323.426.022,6637	134.750.952,3758	1.458.176.975,0395
200.000	970.542.535,6053	154.250.579,7109	1.124.793.115,3162
250.000	758.475.079,7926	162.741.174,5551	921.216.254,3477
300.000	640.125.802,1986	167.303.133,9452	807.428.936,1438
350.000	578.721.368,6889	171.225.110,5659	749.946.479,2548
400.000	548.728.900,4943	175.942.163,8229	724.671.064,3172
450.000	535.590.740,0000	181.346.217,5494	716.936.957,5494
500.000	530.388.424,9694	187.628.599,5510	718.017.024,5204

Berdasarkan nilai *Mean Square Error* (MSE) yang diperoleh tabel 2, Model I dengan metode LSE menghasilkan nilai MSE total terkecil pada nilai daya dukung lingkungan $K = 450.000$, dengan MSE total sebesar 716.936.957,5494 dan diperoleh nilai parameter lainnya dari proses estimasi yaitu

$$a = 0,860544, b = 0,0000280, c = 0,504357, d = 0,000012.$$

Berikut disajikan nilai *Mean Square Error* (MSE) hasil estimasi parameter menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) pada berbagai nilai daya dukung lingkungan K .

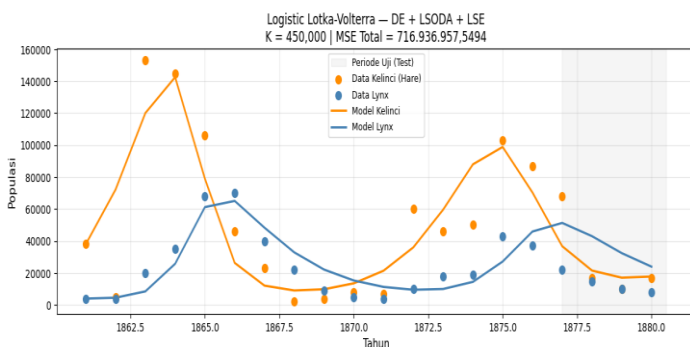
Tabel 3. Nilai *Mean Square Error* (MSE) Model I dengan Metode MLE

Nilai K	MSE Hare	MSE Lynx	MSE Total
50.000	2.532.260.057,4970	149.044.121,0415	2.681.304.178,5385
100.000	1.979.714.189,9255	98.968.512,3112	2.078.682.702,2367
150.000	1.743.482.097,5800	80.072.395,0790	1.823.554.492,6590
200.000	1.506.901.040,0657	78.566.845,1115	1.585.467.885,1772
250.000	1.267.332.966,0434	80.315.733,4087	1.347.648.699,4521
300.000	1.056.696.543,5598	85.476.387,1997	1.142.172.930,7594
350.000	914.895.626,1571	91.485.739,5941	1.006.381.365,7512
400.000	836.625.005,7633	97.367.313,1649	933.992.318,9282
450.000	797.565.414,1799	102.461.949,6063	900.027.363,7861
500.000	772.148.255,5774	108.794.987,8473	880.943.243,4248

Berdasarkan nilai *Mean Square Error* (MSE) yang ditunjukkan pada tabel 3, Model I dengan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) menghasilkan nilai MSE total terkecil pada daya dukung lingkungan $K = 500.000$, dengan MSE total sebesar 880.943.243,4248 dan diperoleh nilai parameter lainnya dari proses estimasi yaitu

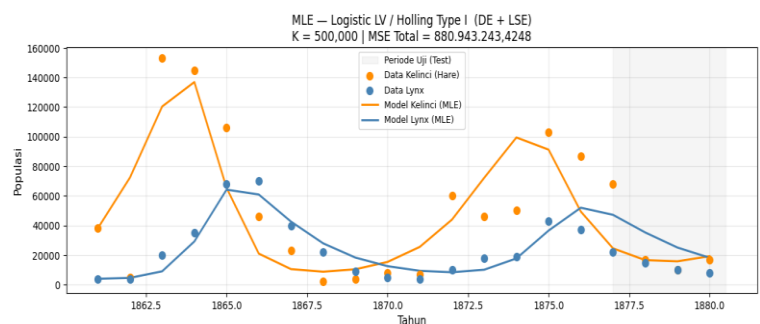
$$a = 0,857745, b = 0,000029, c = 0,540428, \text{ dan } d = 0,000013.$$

Logistic Lotka-Volterra: Pemodelan Populasi Kelinci dan Lynx (1861-1880)



Gambar 1. Hasil simulasi Model I dengan metode LSE dan nilai $K = 450.000$

MLE — Logistic LV / Holling Type I: Populasi Kelinci dan Lynx (1861-1880)



Gambar 2. Hasil simulasi Model I dengan metode MLE dan nilai $K = 500.000$

Berdasarkan gambar (1) dan gambar (2), dapat disimpulkan bahwa Model I dengan metode LSE dan $K = 450.000$ lebih baik dalam merepresentasikan dinamika populasi hare dan lynx. Hal ini ditunjukkan oleh kesesuaian pola fluktuasi dan amplitudo populasi hasil simulasi yang lebih mendekati data observasi.

3.4.2 Estimasi Nilai Parameter Model II

Berikut merupakan nilai *Mean Square Error* (MSE) yang diperoleh Model II dari estimasi parameter menggunakan metode *Least Square Estimation* (LSE) untuk berbagai nilai daya dukung lingkungan.

Tabel 4. Nilai *Mean Square Error* (MSE) Model II dengan Metode LSE

Nilai K	MSE Hare	MSE Lynx	MSE Total
50.000	2.436.513.595,6954	165.309.844,0343	2.601.823.439,7297
100.000	1.322.532.745,1527	242.054.324,6256	1.564.587.069,7783
150.000	794.647.012,9033	283.467.210,4771	1.078.114.223,3804
200.000	659.489.184,3902	236.096.966,6163	895.586.151,0064
250.000	593.128.851,1011	209.323.415,1683	802.452.266,2694
300.000	561.906.074,0581	196.556.961,8608	758.463.035,9189
350.000	546.129.975,3462	190.559.723,6701	736.689.699,0163
400.000	538.689.541,2924	195.770.014,6982	734.459.555,9906
450.000	540.063.089,8811	209.529.834,0332	749.592.923,9143
500.000	545.788.207,7496	223.256.130,7186	769.044.338,4682

Berdasarkan nilai *Mean Square Error* (MSE) yang diperoleh Tabel 4, Model II dengan metode LSE menghasilkan nilai MSE total terkecil pada nilai daya dukung lingkungan $K = 400.000$, dengan MSE total sebesar 734.459.555,9906 dan diperoleh nilai parameter lainnya dari proses estimasi yaitu:

$a = 0,884416$, $b = 0,000031$, $c = 0,527999$, $d = 0,000013$ dan $e = 0,000001$.

Berikut merupakan nilai *Mean Square Error* (MSE) yang diperoleh Model II dari estimasi parameter menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) untuk berbagai nilai daya dukung lingkungan.

Tabel 5. Nilai *Mean Square Error* (MSE) Model II dengan Metode MLE

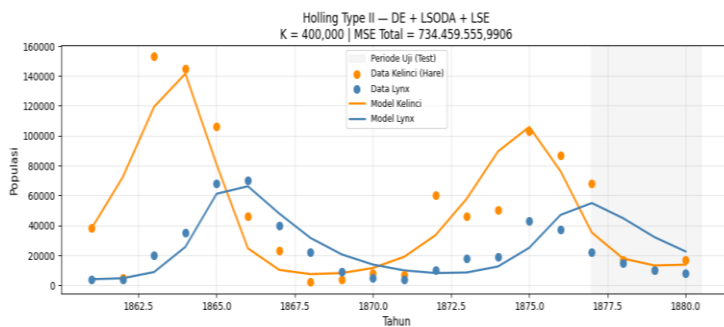
Nilai K	MSE Hare	MSE Lynx	MSE Total
50.000	2.574.543.845,0704	150.564.784,6627	2.725.108.629,7331
100.000	1.894.452.947,9585	88.308.082,9528	1.982.761.030,9113
150.000	1.651.359.910,0474	80.836.811,8116	1.732.196.721,8590
200.000	1.115.387.951,4037	88.652.307,0220	1.204.040.258,4257

Nilai K	MSE Hare	MSE Lynx	MSE Total
250.000	946.756.341,3980	95.065.932,7015	1.041.822.274,0996
300.000	871.517.040,6118	98.351.121,0788	969.868.161,6905
350.000	820.708.292,3800	103.284.462,1163	923.992.754,4962
400.000	747.631.812,4429	122.436.239,7130	870.068.052,1560
450.000	644.624.236,7831	166.072.251,0072	810.696.487,7903
500.000	614.410.716,5311	197.169.234,0336	811.579.950,5647

Berdasarkan nilai *Mean Square Error* (MSE) yang diperoleh Tabel 5, Model II dengan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) menghasilkan nilai MSE total terkecil pada nilai daya dukung lingkungan $K = 450.000$, dengan MSE total sebesar 810.696.487,7903 dan diperoleh nilai parameter lainnya dari proses estimasi yaitu

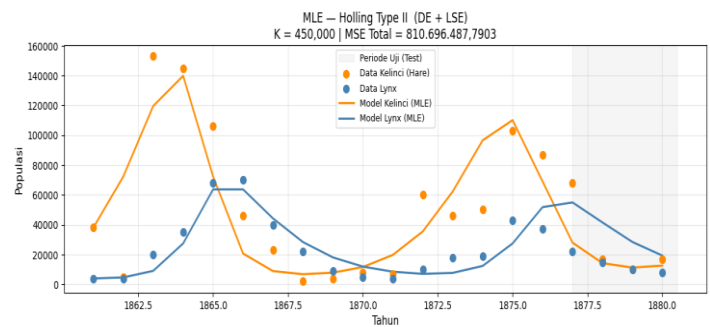
$$a = 0,871785, b = 0,000032, c = 0,547201, d = 0,000014 \text{ dan } e = 0,000001.$$

Holling Type II: Pemodelan Populasi Kelinci dan Lynx (1861-1880)



Gambar 3. Hasil simulasi Model II dengan metode LSE dan nilai $K = 400.000$

MLE - Holling Type II: Populasi Kelinci dan Lynx (1861-1880)



Gambar 4. Hasil simulasi Model II dengan metode MLE dan nilai $K = 450.000$

Berdasarkan pada Gambar (3) dan Gambar (4), dapat disimpulkan bahwa Model II dengan metode LSE dan parameter $K = 400.000$ memiliki performa yang lebih unggul dalam mengaproksimasi dinamika populasi hare dan lynx, sebab hasil simulasi menunjukkan lebih mendekati data observasi.

3.5 Simulasi Numerik

3.5.1 Simulasi Numerik Model I

Berdasarkan hasil estimasi parameter yang telah dilakukan, dapat disimpulkan bahwa untuk Model I, parameter paling optimal diperoleh pada nilai daya dukung lingkungan $K = 450.000$ dengan menggunakan metode *Least Squares Estimation* (LSE). Serta, proses estimasi ini juga menghasilkan nilai parameter lainnya yaitu:

$$a = 0,860544, b = 0,0000280, c = 0,504357, d = 0,000012. \quad (29)$$

Nilai parameter tersebut diperoleh analisis titik kesetimbangan sebagai berikut.

1) Kestabilan Titik Kesetimbangan $E_1(0,0)$

Berdasarkan nilai estimasi parameter yang diperoleh pada Model I (29), diperoleh hasil dari matriks Jacobian (17) pada E_1 sebagai berikut.

$$J_{E_1} = \begin{pmatrix} 0,860544 & 0 \\ 0 & -0,504357 \end{pmatrix} \quad (30)$$

diperoleh nilai eigen dari matriks (30) pada adalah

$$\lambda_1 = 0,860544, \quad \lambda_2 = -0,504357. \quad (31)$$

Sehingga berdasarkan nilai eigen yang diperoleh (31) dapat ditunjukkan bahwa titik kesetimbangan E_1 telah memenuhi seluruh kondisi yang dipersyaratkan dalam Teorema 1 sehingga E_1 merupakan titik sadel /pelana tidak stabil.

2) Kestabilan Titik Kesetimbangan $E_2(450.000, 0)$

Melalui parameter optimal yang telah ditemukan pada Model I (29), diperoleh hasil dari matriks Jacobian (19) pada titik E_2 sebagai berikut.

$$J_{E_2} = \begin{pmatrix} -0,860544 & -12,6 \\ 0 & 4,895643 \end{pmatrix} \quad (32)$$

Berdasarkan matriks (32), diperoleh nilai eigen

$$\lambda_1 = -0,860544, \quad \lambda_2 = 4,895643. \quad (33)$$

Karena dapat ditunjukkan bahwa nilai $-0,504357 + 0,000012(450.000) = 4,895643 > 0$ atau ekuivalen dengan $450.000 > \frac{0,504357}{0,000012} = 42.029,75$, maka titik kesetimbangan E_2 terbukti memenuhi kondisi Teorema 2 dengan poin (ii), sehingga E_2 merupakan titik sadel/pelana tidak stabil.

3) Kestabilan Titik Kesetimbangan $E_3(42.029,7500, 27.863,2024)$

Pada kondisi titik kesetimbangan E_3 dengan nilai estimasi parameter yang diperoleh berdasarkan Model I (29), diperoleh hasil dari matriks Jacobian (21) pada titik E_3 sebagai berikut.

$$J_{E_3} = \begin{pmatrix} -0,080377 & -1,176830 \\ 0,334334 & 0 \end{pmatrix} \quad (34)$$

Sehingga diperoleh hasil dari nilai eigen berdasarkan matriks Jacobian (34) sebagai berikut.

$$\lambda_{1,2} = \frac{-0,080377 \pm 1,252083i}{2} \quad (35)$$

$$\lambda_{1,2} = -0,040189 \pm 0,626042i \quad (36)$$

Karena diperoleh $4,895643 > 0$ dan $0,006460 < 1,574170$, maka terbukti E_3 memenuhi kondisi Teorema 3 poin (ii), sehingga E_3 merupakan titik spiral stabil asimtotik.

Berdasarkan hasil estimasi parameter Model I yang diperoleh menggunakan metode *Least Square Estimation* (LSE), serta dengan menggunakan nilai populasi awal hare dan lynx pada tahun pertama periode pengamatan (1861), masing-masing sebesar 38.000 dan 4.000, diperoleh solusi umum dari model tersebut yang dihitung secara numerik sebagai berikut.

$$x(t) = 42.029,7500 + e^{(-0.0402t)} [(-4.029,7500) \cos(0.6260t) + (45.120,1273) \sin(0.6260t)]$$

$$y(t) = 27.863,2024 + e^{(-0.0402t)} [(-23.863,2024) \cos(0.6260t) - 3.684,3385 \sin(0.6260t)].$$

3.5.2 Simulasi Numerik Model II

Berdasarkan prosedur estimasi parameter yang telah dilakukan pada Model II, ditemukan bahwa nilai daya dukung lingkungan paling optimal yaitu $K = 400.000$. Hasil ini diperoleh melalui metode *Least Squares Estimation* (LSE), serta menghasilkan nilai parameter model lainnya yaitu:

$$a = 0,884416, b = 0,000031, c = 0,527999, d = 0,000013, e = 0,000001. \quad (37)$$

Berdasarkan nilai parameter tersebut diperoleh analisis titik kesetimbangan sebagai berikut.

1) Kestabilan Titik Kesetimbangan $E_4 (0,0)$

Berdasarkan nilai estimasi parameter yang diperoleh bagi Model II (37), diperoleh hasil dari matriks Jacobian (24) pada titik E_4 sebagai berikut.

$$J_{E_4} = \begin{pmatrix} 0,884416 & 0 \\ 0 & -0,527999 \end{pmatrix} \quad (38)$$

Berdasarkan matriks (38), diperoleh nilai eigen sebagai berikut

$$\lambda_1 = 0,884416, \lambda_2 = -0,527999. \quad (39)$$

Sehingga berdasarkan nilai eigen yang diperoleh (39) dapat ditunjukkan bahwa titik kesetimbangan E_4 telah memenuhi seluruh kondisi yang dipersyaratkan dalam Teorema 4 sehingga. Jadi, E_4 merupakan titik sadel tidak stabil.

2) Kestabilan Titik Kesetimbangan $E_5 (400.000, 0)$

Berdasarkan nilai parameter optimal yang telah diperoleh bagi Model II (37), diperoleh nilai dari matriks Jacobian (25) pada titik E_5 sebagai berikut.

$$J_{E_5} = \begin{pmatrix} -0,884416 & -8,857143 \\ 0 & 3,186287 \end{pmatrix} \quad (40)$$

Sehingga berdasarkan matriks (40), diperoleh nilai eigen sebagai berikut.

$$\lambda_1 = -0,884416, \lambda_2 = 3,186287 \quad (41)$$

Karena dapat ditunjukkan $400.000 > \frac{0,527999}{0,000013-(0,527999)(0,000001)}$ atau ekuivalen dengan $400.000 > 42.328,32$, sehingga $\lambda_2 = 3,186287 > 0$, maka titik kesetimbangan E_5 terbukti memenuhi kondisi Teorema 5 dengan point (ii). Jadi, E_5 merupakan titik sadel/pelana tidak stabil.

3) Kestabilan Titik Kesetimbangan $E_6(42.334,7464, 26.590,0328)$

Pada kondisi titik kesetimbangan E_6 dengan nilai estimasi parameter yang diperoleh berdasarkan Model II (37), diperoleh nilai dari matriks Jacobian (26) pada titik E_6 sebagai berikut.

$$J_{E_6} = \begin{pmatrix} 0,061471 & -1,259077 \\ 0,318161 & 0 \end{pmatrix} \quad (42)$$

Nilai dari persamaan karakteristik (24) berdasarkan perolehan matriks (42) sebagai berikut.

$$\lambda^2 + 0,061471\lambda + 0,400630 = 0 \quad (43)$$

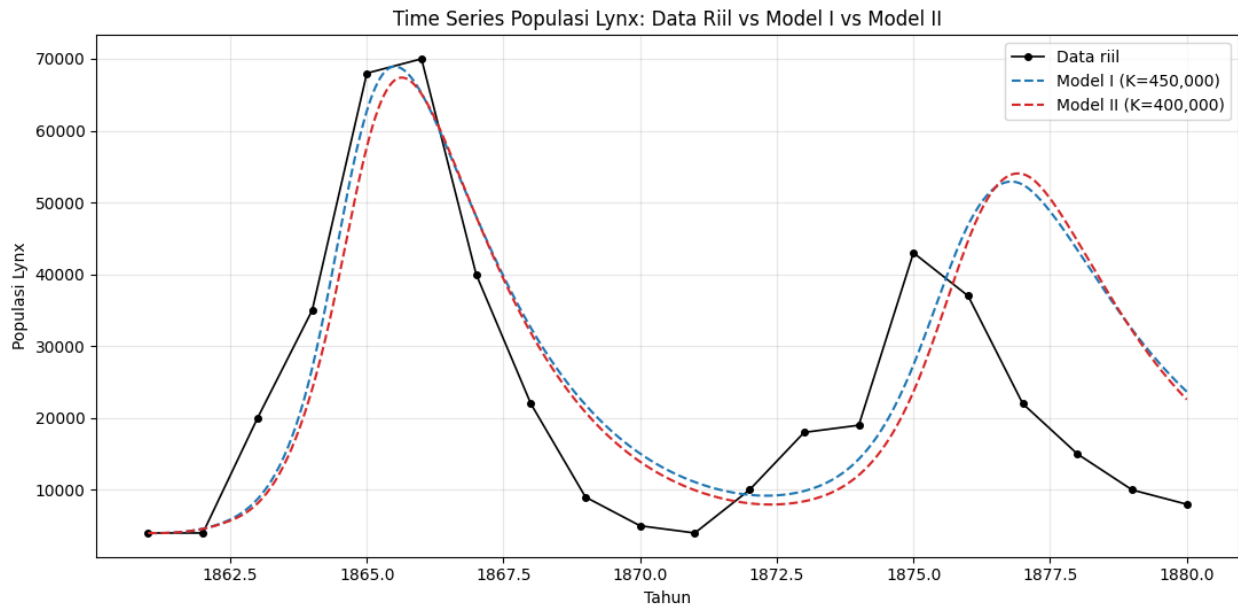
Karena dapat ditunjukkan $\frac{0,527999}{0,000013-0,527999(0,000001)} < 400.000 < \frac{0,000013+0,527999(0,000001)}{0,000001(0,000013-(0,527999)(0,000001))}$ atau ekuivalen dengan $42.328,32 < 400.000 < 1.084.694,20$, maka terbukti E_6 memenuhi kondisi Teorema 6, sehingga dapat disimpulkan bahwa E_6 stabil.

Berdasarkan estimasi parameter yang diperoleh dari Model II serta populasi hare dan lynx pada tahun pertama rentang pengamatan (1861), masing-masing sebesar 38.000 dan 4.000, diperoleh solusi umum dari model tersebut sebagai berikut.

$$\begin{aligned} x(t) &= 42.334,7464 + e^{(-0.0307t)}[-4.334,7464)\cos(0.6322t) + (45.202,4133)\sin(0.6322t)] \\ y(t) &= 26.590,0328 + e^{(-0.0307t)}[(-2.2590,0328)\cos((0.6322 t) - (3.280,1424)\sin(0.6322t)]. \end{aligned}$$

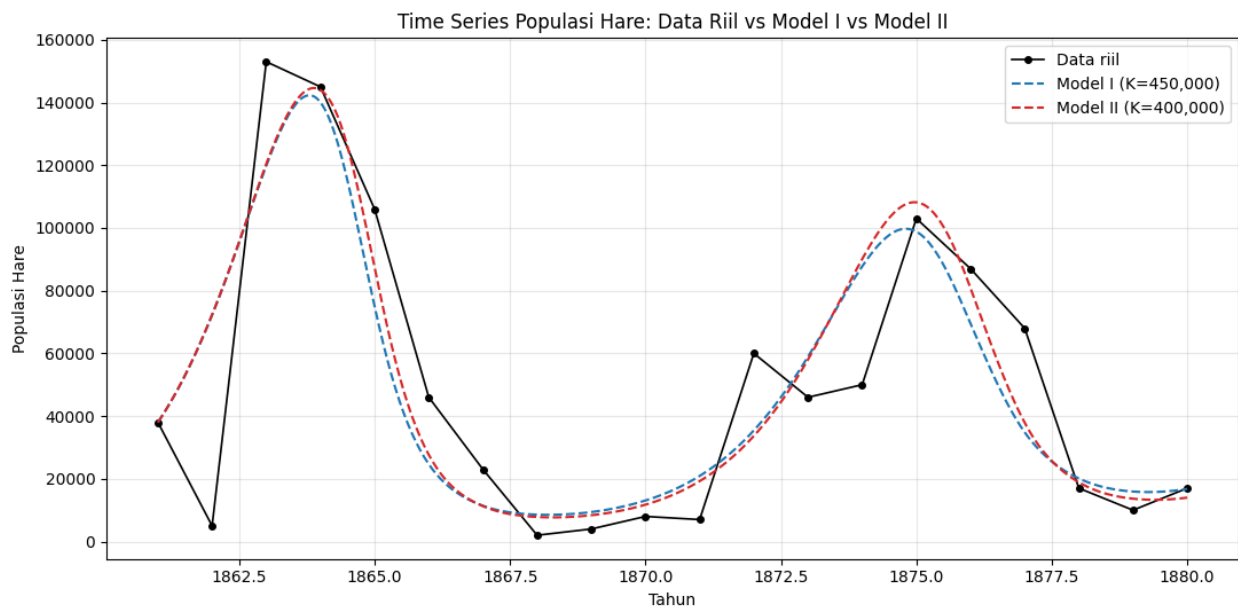
3.5.3 Time Series Dinamika Populasi Hare dan Lynx

Berikut merupakan hasil perbandingan time series dinamika populasi hare dan lynx berdasarkan data riil dengan solusi umum dari kedua model yang diperoleh melalui simulasi numerik menggunakan Python. Simulasi numerik dengan nilai $K = 450.000$ dan $K = 400.000$ sesuai hasil estimasi menggunakan metode LSE di atas.



Gambar 5. Perbandingan Populasi Lynx: Data Riil dan Solusi Model I dengan $K=450.000$ dan Model II dengan $K = 400.000$.

Berdasarkan perbandingan time series I dan II antara data riil dan solusi umum kedua model, dapat disimpulkan bahwa Model I dan Model II dapat merepresentasikan pola dinamika populasi lynx. Namun, Model I dengan respons fungsional Holling Tipe I memberikan hasil yang lebih akurat karena menunjukkan kesesuaian yang lebih dekat dengan data riil.



Gambar 6. Perbandingan Populasi Hare: Data Riil dan Solusi Model I dengan $K=450.000$ dan Model II dengan $K = 400.000$.

Berdasarkan perbandingan time series I dan II antara data riil dan solusi umum kedua model, dapat disimpulkan bahwa Model I dan Model II dapat merepresentasikan pola dinamika populasi

hare. Namun, Model II dengan respons fungsional Holling Tipe II memberikan hasil yang lebih akurat karena menunjukkan kesesuaian yang lebih dekat dengan data riil.

Dari simulasi time series dinamika populasi lynx dan hare yang masing-masing diilustrasikan pada Gambar 5 dan Gambar 6 menunjukkan bahwa, penerapan respons fungsional Holling tipe 1 (pada Model I) lebih realistis. Hal ini kemungkinan disebabkan tingkat kematian alami pemangsa (c) nilainya relatif lebih besar dibandingkan di Model II. Sementara, penerapan respons fungsional Holling tipe II (pada Model II) lebih realistis karena adanya faktor *handling time* yang diperlukan pemangsa pada Model II. Dari kedua fakta tersebut, secara keseluruhan tidak ada model yang lebih sesuai sebagai representasi dinamika populasi lynx dan hare secara simultan berdasarkan data riil.

4 Simpulan

Berdasarkan hasil studi ini, telah dilakukan perbandingan antara dua model interaksi populasi lynx–hare yang merupakan pengembangan dari model Lotka–Volterra. Model I yang menerapkan pertumbuhan logistik pada populasi mangsa (hare) dengan respons fungsional Holling tipe I dan Model II yang menerapkan pertumbuhan logistik pada populasi mangsa (hare) dengan respons fungsional Holling tipe II. Analisis eksistensi dan kestabilan titik kesetimbangan menghasilkan titik-titik kesetimbangan dengan karakteristik serupa.

Nilai-nilai parameter yang digunakan pada kedua model diperoleh dari hasil estimasi parameter menggunakan metode *Least Square Estimation* (LSE) yang telah ditunjukkan lebih baik dibandingkan hasil estimasi menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MSE) berdasarkan data riil populasi kedua spesies.

Analisis time series dinamika populasi hare dan lynx dilakukan dengan membandingkan data riil dengan solusi numerik dari Model I menggunakan nilai parameter hasil estimasi ketika nilai $K = 450.000$ dan solusi numerik dari Model II menggunakan nilai parameter hasil estimasi ketika nilai $K = 400.000$. Hasil perbandingan dinamika populasi lynx dan hare menunjukkan bahwa penerapan respons fungsional yang berbeda pada kedua model relatif dapat merepresentasikan dinamika kedua populasi berdasarkan data riil. Akan tetapi, hasil perbandingan tersebut tidak dapat menyimpulkan model mana yang lebih realistis dalam merepresentasikan dinamika kedua populasi secara simultan. Hal ini menunjukkan bahwa dalam membandingkan tingkat akurasi model terhadap data riil perlu mempertimbangkan faktor lain, misalnya pertumbuhan intrinsik populasi hare atau tingkat kematian alami lynx.

Secara keseluruhan, penelitian ini memberikan kontribusi berupa analisis yang dapat digunakan untuk mengevaluasi kesesuaian model terhadap karakteristik dinamika populasi mangsa dan predator secara empiris, bukan hanya secara teoretis. Penerapan tipe respons fungsional berbeda dan membandingkan tingkat kesesuaiannya secara empiris tidak cukup untuk menyimpulkan model mana yang realistis. Temuan ini dapat menjadi acuan metodologis bagi penelitian pemodelan interaksi predator–mangsa selanjutnya, khususnya dalam menentukan struktur model yang paling representatif sebelum digunakan untuk keperluan prediksi maupun pengambilan keputusan dalam pengelolaan populasi spesies.

5 Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada repositori GitHub atas penyediaan data penelitian, Universitas Negeri Surabaya atas dukungannya, reviewer atas masukannya, dan seluruh pihak yang telah membantu dalam penyusunan artikel ilmiah ini.

6 Daftar Pustaka

- [1] A. De Gaetano, “The Nature of Mathematical Models,” *Mathematics*, vol. 14, no. 11, hal. 1–35, 2026, doi: 10.3390/math14111882.
- [2] P. Frejd dan C. Bergsten, “Professional modellers’ conceptions of the notion of mathematical modelling: Ideas for education,” *ZDM - Math. Educ.*, vol. 50, no. 1–2, hal. 117–127, 2018, doi: 10.1007/s11858-018-0928-2.
- [3] C. Waldock *et al.*, “A quantitative review of abundance-based species distribution models,” *Ecography (Cop.)*, vol. 2022, no. 1, hal. 0–18, 2022, doi: 10.1111/ecog.05694.
- [4] M. Anokye, L. Guerrini, M. Ferrara, A. L. Sackitey, dan A. A. Konadu, “Stability and Bifurcation in a Delayed Predator–Prey Model with Environmental Stress and Dynamic Carrying Capacity,” *Differ. Equations Dyn. Syst.*, 2026, doi: 10.1007/s12591-026-00765-1.
- [5] L. M. J. O’Connor *et al.*, “The Untapped Potential of Food Webs in Systematic Conservation Planning,” *Conserv. Lett.*, vol. 19, no. 1, 2026, doi: 10.1111/con4.70002.
- [6] A. E. Scully, S. Fisher, D. A. W. Miller, dan D. H. Thornton, “Influence of biotic interactions on the distribution of Canada lynx (*Lynx canadensis*) at the southern edge of their range,” *J. Mammal.*, vol. 99, no. 4, hal. 760–772, Agu 2018, doi: 10.1093/jmammal/gyy053.
- [7] W. Bonnaffé, B. C. Sheldon, dan T. Coulson, “Neural ordinary differential equations for ecological and evolutionary time-series analysis,” *Methods Ecol. Evol.*, vol. 12, no. 7, hal.

-
- 1301–1315, 2021, doi: 10.1111/2041-210X.13606.
- [8] Boyce dan R. C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Wiley, 2008.
- [9] D. Luengo, L. Martino, M. Bugallo, V. Elvira, dan S. Särkkä, “A survey of Monte Carlo methods for parameter estimation,” *EURASIP J. Adv. Signal Process.*, vol. 2020, no. 1, 2020, doi: 10.1186/s13634-020-00675-6.
- [10] W. Mu, Q. Wei, dan S. Xiong, “Some notes on concordance between optimization and statistics,” *Math. Probl. Eng.*, vol. 2019, 2019, doi: 10.1155/2019/3485064.
- [11] G. Casella dan R. Berger, *Statistical Inference*. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 2024. doi: 10.1201/9781003456285.
- [12] G. A. F. Seber dan A. J. Lee, *Linear Regression Analysis*. in Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley, 2003. doi: 10.1002/9780471722199.
- [13] K. Lakshmi, B. Mahaboob, D. Sateesh Kumar, G. Balagi Prakash, dan T. Nageswara Rao, “A new vision on ordinary least squares estimation of parameters of linear model,” *AIP Conf. Proc.*, vol. 2375, no. 2, hal. 2015–2030, 2021, doi: 10.1063/5.0066922.
- [14] E. J. Chapman dan C. J. Byron, “The flexible application of carrying capacity in ecology,” *Glob. Ecol. Conserv.*, vol. 13, hal. e00365, Jan 2018, doi: 10.1016/j.gecco.2017.e00365.
- [15] N. E. Papanikolaou, T. Kypraios, H. Moffat, A. Fantinou, D. P. Perdakis, dan C. Drovandi, “Predators’ Functional Response: Statistical Inference, Experimental Design, and Biological Interpretation of the Handling Time,” *Front. Ecol. Evol.*, vol. 9, no. October, hal. 1–5, 2021, doi: 10.3389/fevo.2021.740848.