

Bilangan *Rainbow Connection* pada Graf Siput dan Graf Ubur-Ubur

Gema Hista Medika^{1*}, Syafrizal Sy², Muhafzan³, Zulfaneti⁴

^{1,2,3}Departemen Matematika Dan Sains Data, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas, Padang, Indonesia

⁴Universitas PGRI Sumatera Barat, Padang, Indonesia

e-mail: ¹gemahistamedika@uinbukittinggi.ac.id, ²syafrizasy@sci.unand.ac.id,

³muhafzan@sci.unand.ac.id ⁴zulfaneti@upgrisba.ac.id

Diajukan: 28 Maret 2026, Diperbaiki: 7 Juni 2026, Diterima: 8 Juli 2026

Abstrak

Bilangan *rainbow connection* merupakan salah satu kajian dalam teori graf, khususnya pada topik pewarnaan sisi, yang membahas banyaknya warna *minimum* yang diperlukan agar setiap pasangan titik pada graf terhubung oleh suatu *rainbow path*. Penelitian ini bertujuan menentukan bilangan *rainbow connection* pada graf siput Sl_n dan graf ubur-ubur J_n , dua kelas graf khusus yang dikonstruksi dari subgraf buku segitiga dan dilengkapi titik-titik *pendant*. Metode yang digunakan meliputi analisis struktur graf, penentuan batas bawah berdasarkan sifat $rc(G) \geq diam(G)$, serta konstruksi eksplisit pewarnaan sisi untuk memperoleh batas atas. Hasil penelitian menunjukkan bahwa bilangan *rainbow connection* pada graf siput bernilai 4 untuk setiap $n \geq 1$. Selain itu, diperoleh bahwa bilangan *rainbow connection* pada graf ubur-ubur bernilai 3 untuk $n = 1$ dan bernilai $2n$ untuk setiap $n \geq 2$. Kebaruan penelitian ini terletak pada penentuan bilangan *rainbow connection* graf ubur-ubur serta penyempurnaan hasil bilangan *rainbow connection* pada graf siput melalui konstruksi pewarnaan dan verifikasi *rainbow path* yang lebih komprehensif. Hasil penelitian menunjukkan bahwa struktur graf berpengaruh terhadap banyaknya warna *minimum* yang diperlukan agar graf menjadi *rainbow connected*.

Kata Kunci: *Rainbow connection*, graf siput, graf ubur-ubur, teori graf

Abstract

The *rainbow connection number* is one of the topics studied in graph theory, particularly in edge coloring, which investigates the minimum number of colors required so that every pair of vertices in a graph is connected by a *rainbow path*. This study aims to determine the *rainbow connection number* of the snail graph Sl_n and the jellyfish graph J_n , two special classes of graphs constructed from a triangular book subgraph and augmented with pendant vertices. The method employed includes graph structure analysis, determination of lower bounds based on the property $rc(G) \geq diam(G)$, and explicit edge-coloring constructions to obtain upper bounds. The results show that the *rainbow connection number* of the snail graph is 4 for every $n \geq 1$. In addition, the *rainbow connection number* of the jellyfish graph is 3 for $n = 1$ and $2n$ for every $n \geq 2$. The novelty of this research lies in determining the *rainbow connection number* of the jellyfish graph and refining the previously obtained *rainbow connection result* for the snail graph through a more comprehensive edge-coloring construction and verification of *rainbow paths*. The findings indicate that graph structure influences the minimum number of colors required for a graph to become *rainbow connected*.

Keywords: *Rainbow connection*, snail graph, jellyfish graph, graph theory

1 Pendahuluan

Matematika merupakan salah satu disiplin ilmu yang memiliki peran penting dalam perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi. Salah satu cabang matematika yang berkembang pesat adalah teori graf yang mempelajari struktur yang terdiri atas himpunan titik (*vertex*) dan himpunan sisi (*edge*) yang menghubungkan pasangan titik tersebut. Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736 melalui permasalahan tujuh jembatan Königsberg yang menjadi dasar perkembangan teori graf modern [1]. Seiring perkembangannya, teori graf banyak digunakan untuk memodelkan berbagai sistem jaringan seperti jaringan komputer, sistem komunikasi, dan jaringan transportasi [2];[3].

Salah satu topik yang berkembang dalam teori graf, khususnya pada kajian pewarnaan graf, adalah bilangan *rainbow connection*. Misalkan $G = (V, E)$ merupakan graf terhubung dengan $V(G)$ menyatakan himpunan titik dan $E(G)$ menyatakan himpunan sisi pada graf G . Suatu lintasan antara dua titik disebut sebagai *rainbow path* apabila setiap sisi pada lintasan tersebut memiliki warna yang berbeda. Graf G dikatakan *rainbow connected* apabila setiap pasangan titik di dalam graf dihubungkan oleh setidaknya satu *rainbow path*. Banyaknya warna *minimum* yang diperlukan untuk mewarnai sisi-sisi graf sehingga graf menjadi *rainbow connected* disebut bilangan *rainbow connection* dan dinotasikan dengan $rc(G)$ [1]; [4].

Kajian mengenai bilangan *rainbow connection* telah dilakukan pada berbagai kelas graf. Beberapa di antaranya meliputi graf matahari dan graf kipas (Sy et al., 2013) [5], graf berlian (Shulhany & Salman, 2015) [6], graf bunga (Kumala, 2019) [7], graf salju (Noor et al., 2021) [8], graf *Ferris wheel* (Lakisa et al., 2022) [9], graf Jahangir (Asmara, 2018) [10], serta graf buku (Medika et al., 2024) [11]. Selain itu, penelitian juga berkembang pada graf hasil operasi dan variasi konsep, seperti *rainbow vertex connection* dan *proper rainbow connection* (Maulani, 2020 [12]; Doan & Schiermeyer, 2019 [13]; Akadji, 2021 [14]). Kajian komprehensif yang dilakukan oleh Medika et al. (2026) [15] menunjukkan bahwa penelitian mengenai bilangan *rainbow connection* terus berkembang dan telah dikaji dari berbagai perspektif, baik pada kelas graf khusus, hubungan dengan parameter struktural graf, maupun pengembangan berbagai variannya.

Graf siput juga pernah dikaji oleh Medika dkk. (2025) [16] dalam konteks bilangan *rainbow connection*. Pada penelitian tersebut diperoleh hasil awal berdasarkan konstruksi pewarnaan yang digunakan saat itu. Namun, melalui analisis yang lebih mendalam terhadap struktur graf siput serta verifikasi *rainbow path* yang lebih komprehensif, penelitian ini memperoleh konstruksi pewarnaan yang lebih efisien sehingga menghasilkan nilai bilangan *rainbow connection* yang berbeda. Oleh karena itu, penelitian ini dapat dipandang sebagai penyempurnaan sekaligus pembaruan terhadap hasil yang telah diperoleh sebelumnya.

Meskipun telah banyak diteliti, kajian mengenai bilangan *rainbow connection* pada beberapa graf khusus masih relatif terbatas. Salah satunya adalah graf siput dan graf ubur-ubur yang dikonstruksi dari subgraf buku segitiga dan dilengkapi titik-titik *pendant*. Karakteristik struktur tersebut berbeda dari berbagai graf yang telah dikaji sebelumnya sehingga berpotensi menghasilkan nilai bilangan *rainbow connection* yang berbeda. Sejauh pengetahuan penulis, belum terdapat penelitian yang menentukan bilangan *rainbow connection* pada graf ubur-ubur. Sementara itu, graf siput telah dikaji sebelumnya, namun penelitian ini memberikan penyempurnaan terhadap hasil yang telah diperoleh melalui konstruksi pewarnaan dan verifikasi *rainbow path* yang lebih komprehensif. Oleh karena itu, kedua graf tersebut tetap menarik untuk dikaji lebih lanjut.

Berdasarkan uraian tersebut, penelitian ini bertujuan untuk menentukan bilangan *rainbow connection* pada graf siput dan graf ubur-ubur. Selain memperoleh nilai eksak bilangan *rainbow connection* pada kedua kelas graf tersebut, penelitian ini juga memberikan kajian mengenai hubungan antara struktur graf dan banyaknya warna *minimum* yang diperlukan agar graf menjadi *rainbow connected*. Hasil penelitian ini diharapkan dapat memperkaya kajian bilangan *rainbow connection* pada graf khusus dan menjadi referensi bagi penelitian selanjutnya yang berkaitan dengan pewarnaan sisi dan keterhubungan graf.

2 Metode Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian teoretis dalam bidang teori graf yang bersifat analitik-deskriptif dengan pendekatan deduktif dalam pembuktian matematis. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan bilangan *rainbow connection* pada graf siput Sl_n dan graf ubur-ubur J_n . Metode yang digunakan meliputi studi kepustakaan, analisis struktur graf, serta konstruksi pewarnaan sisi untuk memperoleh nilai bilangan *rainbow connection*.

Tahapan penelitian dilakukan sebagai berikut. Pertama, didefinisikan graf siput Sl_n dan graf ubur-ubur J_n secara formal, meliputi himpunan titik dan himpunan sisi yang membentuk masing-masing graf. Selanjutnya, dilakukan analisis terhadap struktur graf, termasuk hubungan antar titik, diameter graf, serta karakteristik lintasan yang berperan dalam pembentukan *rainbow path*.

Tahap berikutnya adalah menentukan batas bawah bilangan *rainbow connection* dengan memanfaatkan sifat $rc(G) \geq diam(G)$ serta analisis terhadap pasangan titik yang memiliki jarak maksimum pada graf. Setelah itu, ditentukan batas atas melalui konstruksi eksplisit pewarnaan sisi berdasarkan pola pewarnaan yang dibangun dari struktur graf siput dan graf ubur-ubur. Konstruksi tersebut dirancang agar setiap pasangan titik memiliki sedikitnya satu *rainbow path*.

Selanjutnya, dilakukan verifikasi bahwa konstruksi pewarnaan yang diberikan menghasilkan graf yang *rainbow connected*. Verifikasi dilakukan dengan menunjukkan keberadaan *rainbow path* untuk setiap pasangan titik melalui analisis kasus berdasarkan posisi titik pada graf, meliputi titik pada subgraf buku, titik penghubung, serta titik *pendant*. Pembuktian dilakukan secara deduktif dengan memanfaatkan pola pewarnaan yang telah dikonstruksi.

Terakhir, nilai bilangan *rainbow connection* ditentukan dengan menggabungkan hasil batas bawah dan batas atas yang telah diperoleh. Apabila batas bawah dan batas atas bernilai sama, maka diperoleh nilai eksak bilangan *rainbow connection* untuk graf siput Sl_n dan graf ubur-ubur J_n .

3 Hasil dan Pembahasan

Definisi 1 [1]

Misalkan G merupakan graf terhubung yang sisi-sisinya telah diberi warna. Suatu lintasan pada graf G disebut *rainbow path* apabila setiap sisi yang dilalui pada lintasan tersebut memiliki warna yang berbeda.

Definisi 2 [1]

Suatu graf terhubung G dikatakan *rainbow connected* apabila untuk setiap pasangan titik $u, v \in V(G)$ terdapat paling sedikit satu *rainbow path* yang menghubungkan u dan v . Banyaknya warna *minimum* yang diperlukan untuk mewarnai sisi-sisi graf sehingga graf menjadi *rainbow connected* disebut bilangan *rainbow connection* dan dinotasikan dengan $rc(G)$.

Definisi 3 [17]

Jarak antara dua titik u dan v pada graf G , dinotasikan dengan $d(u, v)$, adalah panjang lintasan terpendek yang menghubungkan u dan v . Diameter graf G , dinotasikan dengan $diam(G)$, didefinisikan sebagai jarak maksimum di antara seluruh pasangan titik pada graf G , yaitu

$$diam(G) = \max\{d(u, v) \mid u, v \in V(G)\}.$$

Proposisi 1 [4]

Untuk setiap graf terhubung G , berlaku

$$rc(G) \geq diam(G).$$

Proposisi ini digunakan sebagai dasar untuk menentukan batas bawah bilangan *rainbow connection* pada graf siput dan graf ubur-ubur.

3.1 *Rainbow Connection* pada Graf Siput

Definisi 4 [18]

Graf siput Sl_n (dinotasikan dari *snail* yang berarti siput) merupakan graf yang dikonstruksi dari subgraf buku segitiga B_n , di mana busur bersama pada graf tersebut diamalngasikan dengan C_4 .

Selanjutnya, dua titik *pendant* ditambahkan dan dihubungkan pada salah satu titik ujung hasil amalgamasi tersebut. Parameter n menyatakan banyaknya pola cangkang pada graf siput. Dengan demikian, graf siput Sl_n memiliki $|V(Sl_n)| = n + 6$ titik dan $|E(Sl_n)| = 2n + 6$ sisi.

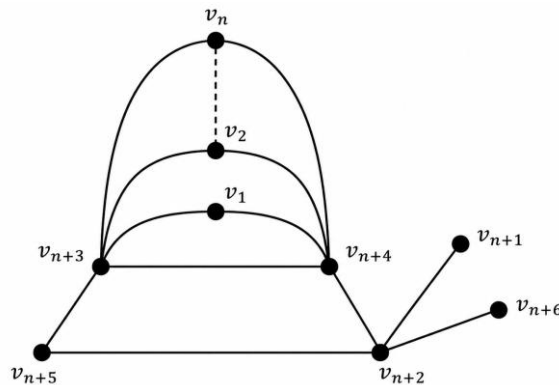
Himpunan titik dan himpunan sisi graf siput Sl_n diberikan sebagai berikut:

$$V(Sl_n) = \{v_i \mid 1 \leq i \leq n + 6\}$$

dan

$$E(Sl_n) = \{v_i v_{n+3} \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i v_{n+4} \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_{n+2} v_{n+4}, v_{n+3} v_{n+4}, v_{n+2} v_{n+5}, v_{n+3} v_{n+5}, v_{n+1} v_{n+2}, v_{n+6} v_{n+2}\}.$$

Sebagai ilustrasi, Gambar 1 menunjukkan graf siput Sl_n beserta penamaan titik-titik yang digunakan dalam penelitian ini.



Gambar 1. Graf siput Sl_n beserta penamaan titik-titiknya

Lemma 1

Untuk setiap $n \geq 1$, diameter graf siput Sl_n adalah

$$\text{diam}(Sl_n) = 3.$$

Bukti.

Perhatikan pasangan titik v_{n+1} dan v_{n+3} . Lintasan terpendek yang menghubungkan kedua titik tersebut adalah $v_{n+1} - v_{n+2} - v_{n+4} - v_{n+3}$, sehingga $d(v_{n+1}, v_{n+3}) = 3$.

Selanjutnya, setiap titik halaman $v_1, v_2, \dots, v_n$ bertetangga dengan v_{n+3} dan v_{n+4} , sedangkan titik-titik *pendant* terhubung melalui v_{n+2} . Oleh karena itu, tidak terdapat pasangan titik yang mempunyai jarak lebih dari 3. Dengan demikian,

$$\text{diam}(Sl_n) = 3.$$

Lemma 2

Untuk setiap $n \geq 1$, berlaku

$$rc(Sl_n) \leq 4.$$

Bukti

Definisikan pewarnaan sisi $c: E(Sl_n) \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ sebagai berikut.

Untuk setiap halaman buku ke- i , $1 \leq i \leq n$,

$$c(v_{n+3}v_i) = \begin{cases} 3, & i \text{ ganjil}, \\ 4, & i \text{ genap}, \end{cases}$$

dan

$$c(v_iv_{n+4}) = \begin{cases} 4, & i \text{ ganjil}, \\ 3, & i \text{ genap}. \end{cases}$$

Selanjutnya,

$$c(v_{n+3}v_{n+4}) = 1,$$

$$c(v_{n+3}v_{n+5}) = 2,$$

$$c(v_{n+5}v_{n+2}) = 1,$$

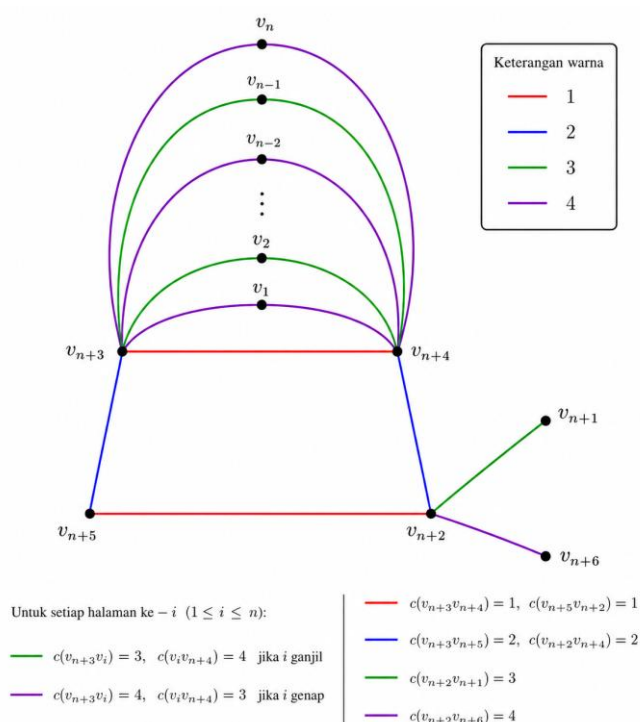
$$c(v_{n+2}v_{n+4}) = 2,$$

$$c(v_{n+2}v_{n+1}) = 3,$$

dan

$$c(v_{n+2}v_{n+6}) = 4.$$

Diberikan konstruksi pewarnaan sisi graf siput Sl_n menggunakan empat warna sebagaimana pada Gambar 2.



Gambar 2. Pewarnaan sisi menggunakan 4 warna pada graf siput Sl_n

Berdasarkan konstruksi tersebut diperoleh:

1. Setiap dua titik pada subgraf buku terhubung oleh *rainbow path* yang melalui salah satu titik dasar buku v_{n+3} atau v_{n+4} .

2. Setiap titik pada subgraf buku terhubung ke titik-titik pada subgraf C_4 melalui lintasan yang menggunakan warna berbeda sehingga membentuk *rainbow path*.
3. Setiap titik pada subgraf buku terhubung ke titik *pendant* v_{n+1} dan v_{n+6} melalui lintasan yang seluruh sisi-sisinya memiliki warna berbeda.
4. Pasangan titik *pendant* v_{n+1} dan v_{n+6} dihubungkan oleh lintasan

$$v_{n+1} - v_{n+2} - v_{n+6},$$

yang menggunakan dua warna berbeda (yaitu warna 3 dan 4 pada konstruksi yang diberikan), sehingga merupakan *rainbow path*.

Karena seluruh pasangan titik pada graf siput Sl_n memiliki sedikitnya satu *rainbow path*, maka graf Sl_n merupakan graf yang *rainbow connected*. Dengan demikian, $rc(Sl_n) \leq 4$.

Lemma 3

Untuk setiap $n \geq 1$, berlaku

$$rc(Sl_n) \geq 4.$$

Bukti

Graf siput Sl_n memuat subgraf siklus C_4 .

Berdasarkan hasil Chartrand dkk [1], diperoleh $rc(C_4) = 2$.

Oleh karena itu diperlukan sedikitnya dua warna untuk mempertahankan *rainbow path* pada subgraf tersebut.

Selanjutnya, graf siput Sl_n memiliki dua titik *pendant*, yaitu v_{n+1} dan v_{n+6} , yang masing-masing berderajat satu. Dengan demikian setiap lintasan yang melibatkan titik-titik tersebut harus melalui sisi $v_{n+1}v_{n+2}$ dan $v_{n+6}v_{n+2}$.

Apabila kedua sisi tersebut diberi warna yang sama, maka lintasan $v_{n+1} - v_{n+2} - v_{n+6}$ mengandung dua sisi dengan warna yang sama sehingga bukan *rainbow path*. Akibatnya kedua sisi *pendant* tersebut harus diberi warna yang berbeda. Dengan demikian diperlukan sedikitnya dua warna untuk subgraf C_4 dan dua warna berbeda untuk kedua sisi *pendant*, sehingga diperoleh $rc(Sl_n) \geq 4$.

Teorema 1

Untuk setiap $n \geq 1$, bilangan *rainbow connection* graf siput Sl_n adalah

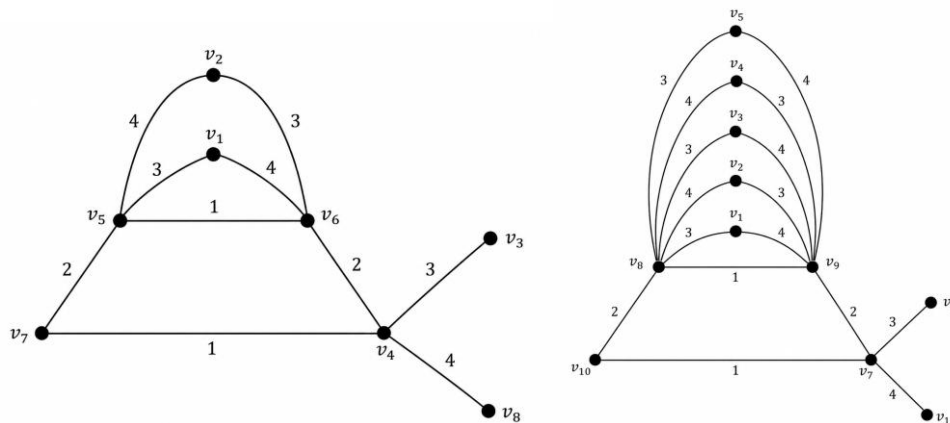
$$rc(Sl_n) = 4.$$

Bukti

Berdasarkan Lemma 2 diperoleh $rc(Sl_n) \leq 4$. Selanjutnya, berdasarkan Lemma 3 diperoleh $rc(Sl_n) \geq 4$. Karena $rc(Sl_n) \leq 4$ dan $rc(Sl_n) \geq 4$, maka diperoleh $rc(Sl_n) = 4$.

Hasil ini menunjukkan bahwa nilai *rainbow connection* graf siput tidak bergantung pada banyaknya halaman pada subgraf buku. Subgraf buku hanya berfungsi menyediakan lintasan alternatif yang memungkinkan diperolehnya *rainbow path* antara pasangan titik tertentu. Kebutuhan jumlah warna *minimum* ditentukan oleh keberadaan subgraf C_4 yang memerlukan dua warna serta dua sisi *pendant* yang harus memperoleh warna berbeda karena merupakan satu-satunya lintasan yang dapat dilalui dari titik-titik berderajat satu tersebut.

Contoh 1. Perhatikan Gambar 3 yang menunjukkan penerapan konstruksi pewarnaan pada graf siput Sl_2 dan Sl_5 .



Gambar 3. Contoh pewarnaan sisi pada graf siput Sl_2 dan Sl_5

3.2 Rainbow Connection pada Graf Ubur-ubur

Definisi 5 [18]

Graf ubur-ubur J_n (dinotasikan dari *jellyfish* yang berarti ubur-ubur) yang dikaji dalam penelitian ini merupakan kasus khusus dari graf ubur-ubur $J_{m,n}$ dengan $m = n$. Graf ini diperoleh dari subgraf buku segitiga B_n yang diamalgamasi dengan siklus C_4 , kemudian ditambahkan $2n$ titik *pendant* yang dihubungkan pada dua titik ujung hasil amalgamasi. Parameter n menyatakan banyaknya lapisan medusa sekaligus banyaknya titik *pendant* pada masing-masing sisi graf ubur-ubur. Graf ubur-ubur J_n mempunyai $3n + 2$ titik dan $4n + 1$ sisi.

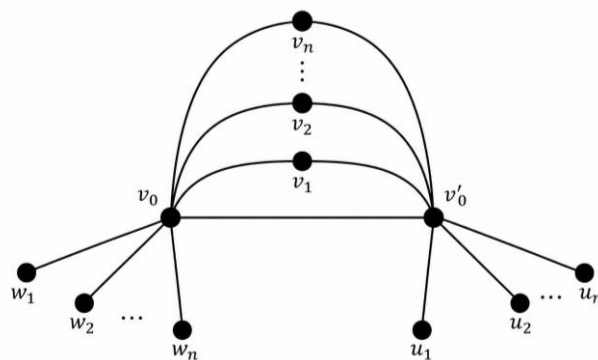
Himpunan titik dan himpunan sisi graf ubur-ubur J_n diberikan sebagai berikut:

$$V(J_n) = \{v_0, v'_0\} \cup \{v_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{w_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_i \mid 1 \leq i \leq n\}$$

dan

$$E(J_n) = \{v_i v_0 \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i v'_0 \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{w_i v_0 \mid 1 \leq i \leq n\} \\ \cup \{u_i v'_0 \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_0 v'_0\}$$

Sebagai ilustrasi, Gambar 4 menunjukkan graf ubur-ubur J_n beserta penamaan titik-titiknya.



Gambar 4. Graf ubur-ubur J_n beserta penamaan titik-titiknya

Lemma 4

Untuk $n = 1$, bilangan *rainbow connection* graf ubur-ubur J_1 adalah

$$rc(J_1) = 3.$$

Bukti

Graf ubur-ubur J_1 terdiri atas lima titik, yaitu v_0 , v'_0 , w_1 , u_1 , dan v_1 . Berikan pewarnaan sisi sebagai berikut:

$$c(v_0w_1) = 1,$$

$$c(v_0v'_0) = 2,$$

$$c(v'_0u_1) = 3,$$

$$c(v_0v_1) = 3,$$

dan

$$c(v_1v'_0) = 1.$$

Konstruksi pewarnaan tersebut menggunakan tepat tiga warna. Selanjutnya diperiksa bahwa setiap pasangan titik pada graf J_1 dihubungkan oleh sedikitnya satu *rainbow path*. Sebagai contoh,

$$w_1 - v_0 - v'_0 - u_1$$

menggunakan warna 1,2,3, sehingga merupakan *rainbow path*. Demikian pula pasangan titik lainnya dapat dihubungkan oleh lintasan yang seluruh sisi-sisinya memiliki warna berbeda.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa dua warna tidak cukup untuk menjadikan J_1 *rainbow connected*. Karena graf J_1 memuat dua titik *pendant*, yaitu w_1 dan u_1 , maka lintasan tunggal yang menghubungkan keduanya adalah

$$w_1 - v_0 - v'_0 - u_1.$$

Lintasan tersebut mempunyai panjang 3. Agar menjadi *rainbow path*, diperlukan tiga warna yang berbeda pada ketiga sisi lintasan tersebut. Oleh karena itu, pewarnaan dengan hanya dua warna tidak mungkin menghasilkan graf yang *rainbow connected*.

Dengan demikian diperoleh

$$rc(J_1) = 3.$$

Lemma 5

Pada graf ubur-ubur J_n , seluruh $2n$ sisi *pendant* harus memperoleh warna yang saling berbeda.

Bukti

Misalkan terdapat dua sisi *pendant* berbeda yang mempunyai warna sama.

Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $c(v_0w_i) = c(v_0w_j), i \neq j$.

Lintasan antara w_i dan w_j bersifat tunggal, yaitu $w_i - v_0 - w_j$.

Karena kedua sisi pada lintasan tersebut mempunyai warna yang sama, maka lintasan tersebut bukan *rainbow path*. Hal ini bertentangan dengan definisi *rainbow connection*.

Dengan cara yang sama diperoleh bahwa setiap sisi *pendant* yang menempel pada v'_0 juga harus mempunyai warna berbeda dari sisi *pendant* lainnya. Akibatnya seluruh $2n$ sisi *pendant* pada graf ubur-ubur harus mempunyai warna yang berbeda.

Dengan demikian $rc(J_n) \geq 2n$.

Teorema 2

Untuk setiap $n \geq 2$, bilangan *rainbow connection* graf ubur-ubur J_n adalah

$$rc(J_n) = 2n.$$

Bukti

Berdasarkan Lemma 5 diperoleh $rc(J_n) \geq 2n$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $rc(J_n) \leq 2n$.

Definisikan pewarnaan sisi

$$c(v_0w_i) = i, 1 \leq i \leq n,$$

$$c(v_0v_i) = n + i, 1 \leq i \leq n,$$

$$c(v_iv'_0) = i, 1 \leq i \leq n,$$

dan

$$c(v'_0u_i) = n + i, 1 \leq i \leq n.$$

Dengan konstruksi tersebut digunakan tepat $2n$ warna.

Selanjutnya diperiksa *rainbow connection* untuk setiap pasangan titik pada graf J_n .

Kasus 1

Dua titik *pendant* di sisi kiri, w_i, w_j .

Lintasan $w_i - v_0 - w_j$ menggunakan warna i, j yang berbeda, sehingga merupakan *rainbow path*.

Kasus 2

Dua titik *pendant* di sisi kanan, u_i, u_j .

Lintasan $u_i - v'_0 - u_j$ menggunakan warna $n + i, n + j$ yang berbeda, sehingga merupakan *rainbow path*.

Kasus 3

Titik *pendant* kiri dan titik *pendant* kanan, w_i, u_j .

Apabila lintasan $w_i - v_0 - v_j - v'_0 - u_j$ tidak membentuk *rainbow path*, maka dipilih titik halaman lain v_k , dengan $k \neq j$. Karena $n \geq 2$, selalu terdapat paling sedikit satu titik halaman v_k yang memenuhi syarat tersebut. Berdasarkan konstruksi pewarnaan, sisi $v_0 v_k$ dan $v_k v'_0$ memperoleh warna yang berbeda dari warna pada sisi-sisi *pendant* yang terlibat. Oleh karena itu lintasan $w_i - v_0 - v_k - v'_0 - u_j$ merupakan *rainbow path*. Dengan demikian setiap pasangan titik w_i dan u_j selalu terhubung oleh suatu *rainbow path*.

Kasus 4

Pasangan yang melibatkan titik buku v_i .

Rainbow path dapat diperoleh melalui sisi $v_0 v_i$ atau $v_i v'_0$, yang masing-masing memiliki warna berbeda.

Kasus 5

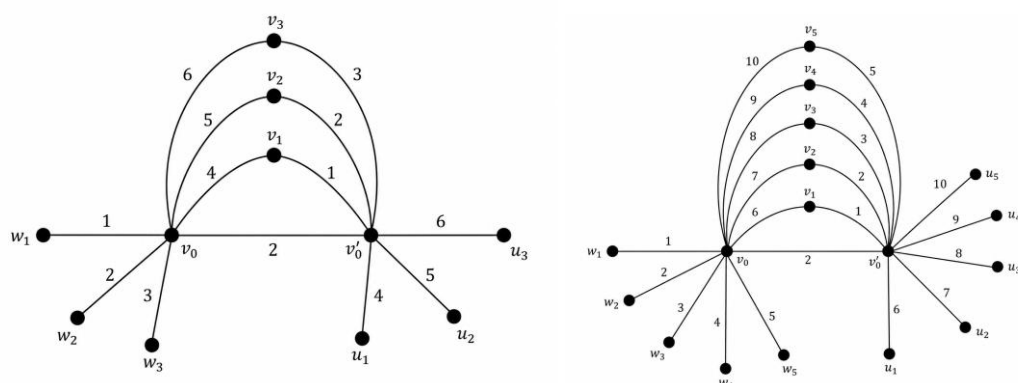
Pasangan yang melibatkan titik pusat v_0 dan v'_0 .

Lintasan $v_0 - v_i - v'_0$ menggunakan dua warna berbeda sehingga merupakan *rainbow path*.

Berdasarkan Kasus 1–5, seluruh kemungkinan pasangan titik pada graf J_n telah tercakup dan masing-masing memiliki *rainbow path*. Akibatnya $rc(J_n) \leq 2n$. Karena $rc(J_n) \geq 2n$ dan $rc(J_n) \leq 2n$, maka diperoleh $rc(J_n) = 2n$.

Hasil ini menunjukkan bahwa nilai *rainbow connection* graf ubur-ubur J_n dipengaruhi oleh banyaknya titik *pendant* yang terdapat pada graf. Setiap titik *pendant* berderajat satu hanya memiliki satu lintasan menuju titik-titik lain sehingga sisi yang berinsiden dengannya harus memperoleh warna yang berbeda untuk mempertahankan sifat *rainbow connected*. Oleh karena itu, untuk $n \geq 2$ diperoleh $rc(J_n) = 2n$. Sementara itu, keberadaan subgraf buku segitiga menyediakan lintasan alternatif yang menjamin terbentuknya *rainbow path* antar pasangan titik tanpa menambah kebutuhan warna secara signifikan.

Contoh 2. Perhatikan Gambar 5 yang menunjukkan penerapan konstruksi pewarnaan pada graf ubur-ubur J_3 dan J_5 .



Gambar 5. Contoh pewarnaan sisi pada graf ubur-ubur J_3 dan J_5

4 Simpulan

Berdasarkan hasil analisis yang telah dilakukan, diperoleh bilangan *rainbow connection* pada graf siput Sl_n dan graf ubur-ubur J_n . Untuk graf siput Sl_n , diperoleh $rc(Sl_n) = 4, n \geq 1$. Hasil ini menunjukkan bahwa banyaknya halaman pada subgraf buku tidak memengaruhi nilai *rainbow connection*. Subgraf buku hanya berperan menyediakan lintasan alternatif yang memungkinkan terbentuknya *rainbow path*, sedangkan kebutuhan jumlah warna *minimum* ditentukan oleh keberadaan subgraf C_4 dan dua sisi *pendant* yang harus memperoleh warna berbeda.

Untuk graf ubur-ubur J_n , diperoleh bahwa bilangan *rainbow connection* bernilai 3 untuk $n = 1$ dan bernilai $2n$ untuk setiap $n \geq 2$. Hasil ini menunjukkan bahwa nilai *rainbow connection* pada graf ubur-ubur meningkat secara linear terhadap parameter n . Peningkatan tersebut disebabkan oleh bertambahnya jumlah titik *pendant* berderajat satu yang memerlukan warna berbeda pada sisi-sisi yang berinsiden dengannya agar setiap pasangan titik tetap terhubung oleh *rainbow path*.

Secara keseluruhan, penelitian ini menunjukkan bahwa struktur graf memiliki pengaruh yang lebih dominan terhadap bilangan *rainbow connection* dibandingkan diameter graf. Keberadaan titik *pendant*, pola keterhubungan antar sisi, dan ketersediaan lintasan alternatif menjadi faktor utama dalam menentukan jumlah warna *minimum* yang diperlukan agar suatu graf menjadi *rainbow connected*. Hasil penelitian ini diharapkan dapat menjadi referensi bagi pengembangan kajian *rainbow connection* pada kelas graf khusus lainnya.

5 Daftar Pustaka

- [1] G. Chartrand, G. L. Johns, K. A. McKeon, and P. Zhang, "Rainbow connection in graphs," *Math. Bohem.*, vol. 133, no. 1, pp. 85–98, 2008.
- [2] R. Diestel, *Graph Theory*, 5th ed. Berlin: Springer, 2017.
- [3] D. B. West, *Introduction to Graph Theory*, 3rd ed. Pearson, 2021.

-
- [4] X. Li and Y. Sun, *Rainbow Connections of Graphs*. New York: Springer, 2012. doi: 10.1007/978-1-4614-3118-0.
 - [5] S. Sy, G. H. Medika, and L. Yulianti, “The Rainbow Connection of Fan and Sun,” *Appl. Math. Sci.*, vol. 7, no. 64, pp. 3155–3160, 2013.
 - [6] M. A. Shulhany and A. N. M. Salman, “Bilangan Terhubung Pelangi Graf Berlian,” *Pros. Semin. Nas. Mat. dan Pendidik. Mat. UMS*, no. 1, pp. 916–923, 2015.
 - [7] I. S. Kumala, “Bilangan Terhubung Pelangi pada Graf Bunga dan Graf lemon,” *Mat. dan Pendidik. Mat.*, vol. 4, no. 1, pp. 39–48, 2019.
 - [8] C. A. P. Noor, L. Yahya, S. K. Nasib, and N. I. Yahya, “Bilangan Terhubung Pelangi Pada Graf Salju (Sn_m),” *J. Fundam. Math. Appl.*, vol. 4, no. 1, pp. 29–44, 2021, doi: 10.14710/jfma.v4i1.9035.
 - [9] N. Lakisa, N. Nurwan, S. K. Nasib, and N. I. Yahya, “Bilangan Terhubung Pelangi pada Graf Ferris Wheel (Fw_n),” *JMPM J. Mat. dan Pendidik. Mat.*, vol. 7, no. 1, pp. 66–80, 2022, doi: 10.26594/jmpm.v7i1.2337.
 - [10] D. N. Asmara, “Bilangan *Rainbow Connection* Dan *Strong Rainbow Connection* Pada Graf Jahangir,” *J. Mat. Unand*, vol. VII, no. 1, pp. 52–58, 2018.
 - [11] G. H. Medika, Z. B. Tomi, and E. R. Wulan, “Bilangan *rainbow connection* pada graf buku,” *KUBIK J. Publ. Ilm. Mat.*, vol. 9, no. 1, pp. 87–97, 2024.
 - [12] A. Maulani, “Rainbow Connection and Strong Rainbow Connection of Corona Graphs,” *Indones. J. Comb.*, vol. 4, no. 2, pp. 45–54, 2020.
 - [13] T. D. Doan and I. Schiermeyer, “Proper Rainbow Connection Number of Graphs,” *Discret. Appl. Math.*, vol. 255, pp. 56–63, 2019, doi: 10.1016/j.dam.2018.07.030.
 - [14] A. F. Akadji, “Rainbow Vertex Connection Number and Strong Rainbow Vertex Connection Number of Graphs,” *Desimal J. Mat.*, vol. 4, no. 2, pp. 159–166, 2021.
 - [15] G. H. Medika, S. Sy, Muhafzan, and Zulfaneti, “Rainbow Connection Numbers In Graphs : A Comprehensive Study Bilangan *Rainbow Connection* Pada Graf : Kajian Komprehensif,” *Math Educ. J.*, vol. 10, no. 1, pp. 44–59, 2026.
 - [16] G. H. Medika and S. Sy, “The Rainbow Connection Number of Snail Graphs,” *BiCED Proceeding*, vol. 3, no. 1, pp. 1–6, 2025.
 - [17] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, *Graph Theory*. London: Springer, 2008. doi: 10.1007/978-1-84628-970-5.
 - [18] K. Akbar and K. A. Sugeng, “Pelabelan *graceful* pada graf siput dan graf ubur-ubur,” in *Prosiding KNM XX, Universitas Pattimura*, 2021, pp. 143–148. doi: 10.30598/PattimuraSci.2021.KNMXX.143-148.